TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MAT-60206 Mathematical analysis (Kauhanen, SC309)
Exam, Feb 28, 2017

No calculator. No written material.

1. Let $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ be sequences. Assume that there is $M > 0$ such that

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2} \quad \text{for all } n \geq 100,$$

and that the sequence (b_n) is bounded. Show using the ϵ definition of the limit that

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0.$$

2. (a) Let $x_0 \in \mathbb{R}$. Suppose that $f(x) \geq 0$ for all $x > x_0$ and that

$$L = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

exists. Show using the $\epsilon\delta$ definition of the limit that $L \geq 0$.
Hint: proof by contradiction.

(b) Suppose that $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentiable and increasing. Show that $g'(x_0) \geq 0$ for all $x_0 \in \mathbb{R}$.
Hint: the right derivative.

3. (a) Let P be a partition of $[a, b]$. Suppose that $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ is increasing. Show that

$$S(P) - s(P) \leq (g(b) - g(a))\|P\|.$$

(b) Let $f\colon [a, a+1] \to \mathbb{R}$ be continuous. Find

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a+1/n} n f(x)\, dx.$$

Hint: the Mean Value Theorem for Integrals.

4. Define

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

(a) Show that (f_n) converges pointwise on $\mathbb{R}$, and find the limit function f.
(b) Show that the convergence is uniform on $\mathbb{R}$.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-60206 Mathematical analysis	(Kauhanen, SC309)
Tentti 28.2.2017	

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. Olkoot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jonoja. Oletetaan, että on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2} \quad \text{kaikilla } n \geq 100$$

ja että jono (b_n) on rajoitettu. Osoita raja-arvon ϵ-määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0.$$

2. (a) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x > x_0$ ja että on olemassa

$$L = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

Osoita raja-arvon $\epsilon\delta$-määritelmää käyttäen, että $L \geq 0$.
Ohje: epäsuora todistus.

(b) Oletetaan, että $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja kasvava. Osoita, että $g'(x_0) \geq 0$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$.
Ohje: oikeanpuoleinen derivaatta.

3. (a) Olkoon P välin $[a, b]$ jako. Oletetaan, että $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on kasvava. Osoita, että

$$S(P) - s(P) \leq (g(b) - g(a))\|P\|.$$

(b) Olkoon $f\colon [a, a+1] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a+1/n} nf(x)\,dx.$$

Ohje: integraalilaskennan väliarvolause.

4. Määritellään

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

(a) Osoita, että (f_n) suppenee pisteittäin $\mathbb{R}$:ssä ja määritä rajafunktio f.
(b) Osoita, että suppeneminen on tasaista $\mathbb{R}$:ssä.