

Kirjoita jokaiseen konseptiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Tee neljä tehtävää siististi konsepteille välivaiheet perustellen. Ei elektronisia laitteita eikä muistiinpanoja. Kaavakokoelma jaetaan.

1. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = 2x_2 - x_3, & x_2(0) = -1, \\ x_3' = 2x_3, & x_3(0) = -1. \end{cases}$$

Vihje: Helppo tapa: $A = C + B$, Vaikea tapa: Yleistetyt ominaisarvot

2. Olkoon

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \cos(2t) & e^{-t} \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^{-t} \sin(2t) & e^{-t} \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Määritä matriisin A ominaisarvot ja vektorit.

3. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \cos(t) & x_1(0) = 0, \\ x_2' = -x_1 + \sin(t) & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

Vihje: Hullu paljon työtä tekee, viisas (tai onnekas arvaaja) pääsee vähemmällä...

4. Ratkaise toinen seuraavista.

(1) Muunna ensimmäisen kertaluokan lineaarisiksi yhtälöryhmäksi.

$$\begin{cases} x_1'' + x_2'' - x_2' + x_1 = \cos(t) & x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0 \\ x_2'' + x_1' - x_2 = \sin(t) & x_2(0) = 0, x_2'(0) = 1 \end{cases}$$

Kirjoita matriisimuotoon. *Bonus (3p ylimääräistä): Ratkaise tehtävä.*

(2) Muista että avaruuden $\mathbb{R}^{n \times n}$ ominaisuus on *geneerinen* jos se pätee avoimessa ja tiheässä joukossa. Onko ominaisuus *Matriisilla A on erisuuret ominaisarvot* geneerinen? Perustele. (Pieni määrä käsienheiluttelua sallitaan tiheyden osalta.)

5. Tarkastellaan vektorikenttää

$$\vec{V}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x - 2z \\ -y \\ x \end{bmatrix}.$$

Onko vektorikenttä lineaarinen? Onko vektorikentän virtaus on hyperbolinen? Jos on, jaa avaruus stabiilin ja epästabiilin aliavaruuden suoraksi summaksi, eli etsi E^u ja E^s siten, että $\mathbb{R}^3 = E^s \oplus E^u$. Mitä nämä aliavaruudet tarkoittavat alkuehtojen näkökulmasta?