MAT-60150 Differentiaaliyhtälöt/Hansen Tentti 15.03.2017

Kirjoita jokaiseen konseptiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Tee **neljä** tehtävää siististi konsepteille välivaiheet perustellen. Ei elektronisia laitteita eikä muistiinpanoja. Kaavakokoelma jaetaan.

1. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = -x_1 + x_2, & x_2(0) = 1, \\ x_3' = x_1 + x_3, & x_3(0) = -1. \end{cases}$$

   Vihje: Eksponenttimatriisi voi olla työläs laskea, mutta tehtävää voi yksinkertaistaa...

2. Olkoon

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & 0 & -e^{-2t}\sin(2t) & e^{-2t}\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

   Määritä matriisin A ominaisarvot ja vektorit. HUOM: Tee se kunnolla ja oikein, niin tehtävä on helppo.

3. Ratkaise alkuarvo-ongelma:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 & x_1(0) = 1, \\ x_2' = -x_1 + x_2 + e^t & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

   Ohje: Integraalilauseke on *tarpeettoman* monimutkainen. Muodosta se silti. Jos et osaa laskea integraalia, koeta arvata oikea ratkaisu. Oikea ratkaisu on melko yksinkertainen.

4. Muunna ensimmäisen kertaluokan lineaariseksi yhtälöryhmäksi.

$$\begin{cases} x_1'' + x_2'' - x_2' + x_1 = cos(t) & x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0 \\ x_2'' + x_1' - x_2 = sin(t) & x_2(0) = 0, x_2'(0) = 1 \end{cases}$$

   Kirjoita matriisimuotoon, eli muotoon $x' = Ax + F$. *Bonus (3p ylimääräistä): Ratkaise tehtävä.*

5. Tarkastellaan vektorikenttää

$$\vec{V}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x - 2z \\ -2y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

   Mistä tiedämme että vektorikenttä on lineaarinen? Onko vektorikentän virtaus on hyperbolinen? Määritä $\mathbb{R}^n$:n stabiili aliavaruus E^s. (Epästabiilia ei tarvitse määrittää)