

# MAT-60000 Matriisilaskenta

Tentti (19.10.2016) Henri Hansen

Ei laskimia, ei kirjallisuutta. Vastaa *neljään* seuraavista kysymyksistä.

1. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelma ja laske  $\det(A)$ .

2. Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit.

3. Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Singulaariarvohajotelma. Kerro miten  $\text{rank}(A)$  ja  $\|A\|$  näkyvät hajotelmasta.

4. (a) Osoita, että matriisi  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  on ei-singulaarinen jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.
- (b) Olkoon  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  ja olkoon  $\text{rank}(A) = n$ . Mitä voidaan sanoa matriisiyhtälön  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ratkaisun olemassaolosta tapauksissa  $m > n$  ja  $m = n$ ?
- (c) Osoita oikeaksi tai vääräksi: Jos  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$  on aliavaruuden  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$  kanta ja  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_q\}$  on aliavaruuden  $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^n$  kanta, niin  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_q\}$  on aliavaruuden  $\mathcal{S} + \mathcal{R}$  kanta.

5. Muistetaan, että matriisnormi määritellään

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

- (a) Osoita, että  $\|A\| = 0$  vain jos  $A = 0$ .
- (b) Osoita, että jos  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  on unitaarinen, niin  $\|U\| = 1$ .
- (c) Osoita, että jos  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , niin  $\|A\|$  on matriisin  $A$  suurin singulaariarvo. (Vihje,  $A^*A$ :n ominaisarvo...)
6. Osoita, että jos  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  on projektiomatriisi, niin  $I - P$  on myös projektiomatriisi, ja että  $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$ .