MAT-01360 Matematiikka 3 / Mattila
Tentti 1.3.2017

Vastaa kaikkien kysymysten kaikkiin kohtiin. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperin saa pitää. Ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Määritä osittaisintegroimalla $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$. (2p)

   (b) Määritä integraali
   $$\int \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x+3)}\,dx$$
   sijoituksen $u=\sqrt{x}$ ja osamurtokehitelmän avulla. (4p)

2. (a) Suppeneeko epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}$? Myönteisessä tapauksessa määritä integraalin arvo. (3p)

   (b) Osoita sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ suppenevaksi tai hajaantuvaksi tarkastelemalla sitä vastaavan osasummajonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ yleistä termiä, kun $n\to\infty$. (3p)

3. (a) Määritä potenssisarjan $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\left(\frac{x-1}{5}\right)^k$ suppenemisväli. (3p)

   (b) Määritä raja-arvo $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\arctan x}{(\cos x-1)\ln(1+x)}$ käyttäen apuna potenssisarjoja
   $$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\quad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},$$
   $$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \quad\text{ja}\quad \arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.\quad (3p)$$

4. (a) Ratkaise alkuarvotehtävä
   $$x^2y'+2xy=1 \quad y(1)=2 \quad (3p)$$

   (b) Määritä yritemenetelmällä differentiaaliyhtälön
   $$y''+2y'=4\sin 2x$$
   yleinen ratkaisu. (3p)