MAT-61006 Introduction to functional analysis /POHJOLAINEN
Tentti 29.10.2015
Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia

1. Määrittele

   a) metrinen avaruus M
   b) avoin joukko M:ssä
   c) suljettu joukko M:ssä
   d) joukon $A \subset M$ sulkeuma $\bar{A}$
   e) olkoot A ja B M:n joukkoja. Määrittele milloin A on tiheä B:ssä.
   f) Cauchy-jono M:ssä.

2. Osoita, että metrisen avaruuden joukon A sulkeuma on suljettu joukko.

3. Olkoon H Hilbert-avaruus.
   a) Milloin Hilbert-avaruuden operaattori T on kompakti ?
   b) Olkoon $G \in B(H)$ ja T kompakti operaattori. Osoita, että GT on kompakti operaattori.

4. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in B(H)$.
   a) Määrittele T:n adjungoitu operaattori T^*.
   b) Osoita, että $\|T\| = \|T^*\|$

5. Olkoon K Hilbert-avaruuden H suljettu, konveksi osajoukko. Osoita, että jokaista H:n alkiota x_0 kohti on olemassa yksikäsitteinen K:n alkio y_0 siten, että

$$\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y\| \quad \forall y \in K.$$

MAT-61006 Introduction to functional analysis /POHJOLAINEN
Exam 29.10.2015
Notes, literature or calculators are not allowed. Justify your answers.

1. Give the definitions of

a) metric space M
b) open set in M
c) closed set in M
d) the closure $\bar{A}$ of a set $A \subset M$
e) Let A and B be sets in M. Give the definition of denseness, so that A is dense in B.
f) Cauchy-sequence in M.

2. Prove that the closure of the set A in a metric space M is a closed set.

3. Let H be a Hilbert-space.
a) When is the operator T, in the Hilbert space, compact ?
b) Let $G \in B(H)$ and let T be a compact operator. Prove that GT is a compact operator.

4. Let H be a Hilbert-space and $T \in B(H)$.
a) Give the definition of the adjoint operator T*.
b) Show that $\|T\| = \|T^*\|$

5. Let K be a closed convex subset in Hilbert space H. Prove that for each element x_0 in H there exists a unique element y_0 in K so that

$$\|x_0 - y_0\| \le \|x_0 - y\| \quad \forall y \in K.$$

PANU
PARVIAINEN
(panu.p.parviainen@gmail.com)