

# MAT-61006 Johdatus funktionaalianalyysiin

I Välikoe 17. 3. 2015

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia

Tehtävä 1. Määrittele seuraavat käsitteet normiavaruudessa  $V$ .

- (a) Aliavaruus.
- (b) Separoituvuus.
- (c) Jatkuvuuden  $\varepsilon$ - $\delta$  määritelmä funktiolle  $f : V \rightarrow V$  pisteessä  $x_0 \in V$ .

Tehtävä 2. Olkoon  $(M, d)$  metrinen avaruus.

- (a) Määrittele kontraktiokuvaus.
- (b) Onko kontraktiokuvaus jatkuva?
- (c) Onko kontraktiokuvaus tasaisesti jatkuva?

Perustele vastauksesi, pelkkä "On" tai "Ei" ei riitä.

Tehtävä 3.

- (a) Määrittele rajoitettu lineaarinen operaattori.
- (b) Määritellään operaattori  $T : L^2[0, \infty) \rightarrow L^2[0, \infty)$  kaavalla

$$(Tf)(t) = f(2t), \quad t \geq 0, \quad f \in L^2[0, \infty).$$

Osoita, että  $T$  on lineaarinen ja rajoitettu. Avaruuden  $L^2[0, \infty)$  normi on tietenkin vanha tuttu

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Tehtävä 4. Olkoon  $V$  normiavaruus.

- (a) Määrittele kompakti joukko.
- (b) Osoita, että kompaktin joukon suljettu osajoukko on kompakti.