

MAT-61006 Introduction to Functional Analysis

Tentti 9.10.2015

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia. Perustele vastauksesi.

1. Määrittele

- a) metrinen avaruus
- b) (lineaarinen) normiavaruus
- c) kompakti joukko
- d) Banach-avaruus
- e) Hilbert-avaruus
- f) Cauchy-jono

2. Olkoon (X,d) täydellinen metrinen avaruus ja $f:X \rightarrow X$ kontraktiokuvaus. Osoita, että yhtälöllä $f(x)=x$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

3. Olkoon X Banach-avaruus.

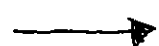
- a) Määrittele lineaarinen ja rajoitettu kuvaus $T:X \rightarrow X$.
- b) Määrittele T :n operaattorinormi.
- c) Osoita, että $\|TA\| \leq \|T\| \|A\|$, kun T ja A ovat lineaarisia ja rajoitettuja operaattoreita.

4. Olkoon $k \in C(I \times I)$, missä I on suljettu ja rajoitettu väli. Määritellään operaattori $K:L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ yhtälöllä

$$Kf = \int_I k(\cdot, s)f(s) ds.$$

Osoita, että K on lineaarinen ja rajoitettu kuvaus. Mikä on K^* ?

5. Esitä ja todista miniminormiteoreema.



MAT-61006 Introduction to Functional Analysis
Exam 9.10.2015

Notes, literature or calculators are not allowed. Justify your answers.

1. Give the definitions of

- a) metric space
- b) (linear) normed space
- c) compact set
- d) Banach space
- e) Hilbert space
- f) Cauchy sequence

2. Let (X,d) be a complete metric space and let $f : X \rightarrow X$ be contraction mapping. Prove that the equation $f(x) = x$ has one and only one solution.

3. Let X be a Banach space. Give the definitions of

- a) linear and bounded operator $T : X \rightarrow X$
- b) operator norm of T .
- c) Prove that $\|TA\| \leq \|T\| \|A\|$, where T and A are linear and bounded operators.

4. Let $k \in C(I \times I)$, where I is bounded and closed interval. Define an operator $K : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ as

$$Kf = \int_I k(\cdot, s)f(s) ds.$$

Prove that K is linear and bounded operator. What is K^* ?

5. State and prove the Minimum Norm Theorem.

PANU
PARVIAINEN
(panu.p.parviainen@gmail.com)

