MAT-61006 Johdatus funktionaalianalyysiin

II Välikoe 6. 5. 2014

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia

Tehtävä 1. Olkoon H Hilbert avaruus ja $T \in \mathcal{B}(H)$. Määrittele T:n resolventtijoukko, resolventtioperaattori, spektri ja spektrin osat.

Tehtävä 2. Olkoon $\tau > 0$ kiinteä. Määritellään operaattori $T : L^2[0,\infty) \to L^2[0,\infty)$ kaavalla

$$(Tf)(t) = f(t+\tau), \qquad t \geq 0, \quad f \in L^2[0,\infty).$$

Määrää T:n adjungaatti T^*.

Tehtävä 3. Olkoon H Hilbert avaruus ja $M \subset H$ aliavaruus.

(a) Määrittele M:n ortogonaalikomplementti $M^\perp$.

(b) Osoita, että M on tiheä H:ssa jos ja vain jos $M^\perp = \{0\}$.

Tehtävä 4. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $(e_n)_{n=1}^\infty \subset H$ ortonormaali jono. Todista Besselin epäyhtälö:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{kaikilla } x \in H.$$

MAT-61006 Johdatus funktionaalianalyysiin

II Välikoe 6. 5. 2014

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia

Tehtävä 1. Olkoon H Hilbert avaruus ja $T \in \mathcal{B}(H)$. Määrittele T:n resolventtijoukko, resolventtioperaattori, spektri ja spektrin osat.

Tehtävä 2. Olkoon $\tau > 0$ kiinteä. Määritellään operaattori $T : L^2[0,\infty) \to L^2[0,\infty)$ kaavalla

$$(Tf)(t) = f(t+\tau), \qquad t \geq 0, \quad f \in L^2[0,\infty).$$

Määrää T:n adjungaatti T^*.

Tehtävä 3. Olkoon H Hilbert avaruus ja $M \subset H$ aliavaruus.

(a) Määrittele M:n ortogonaalikomplementti $M^\perp$.

(b) Osoita, että M on tiheä H:ssa jos ja vain jos $M^\perp = \{0\}$.

Tehtävä 4. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $(e_n)_{n=1}^\infty \subset H$ ortonormaali jono. Todista Besselin epäyhtälö:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{kaikilla } x \in H.$$