TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MAT-60206 Mathematical analysis
1st Mid-course exam, Oct 20, 2014

1. a) Let $S \subset \mathbb{R}$ be nonempty and bounded above, and let $a < 0$. Define

$$aS = \{as \colon s \in S\}.$$

Prove that aS is bounded below and that

$$\inf(aS) = a\sup(S).$$

b) Let $c > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}$. Suppose that

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \quad \text{and} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Show that

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \infty.$$

(In other words, "$c \cdot \infty = \infty$".)

2. a) Suppose that $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentiable. Let $x_0 \in \mathbb{R}$. Define $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

At which points is g continuous? Justify your answer.

b) Let $q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, be any polynomial of degree 2 and let $[a, b]$ be any closed and bounded interval. Calculate the point c guaranteed by the Mean Value Theorem on $[a, b]$ and show that c is the midpoint of $[a, b]$.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-60206 Mathematical analysis
1. välikoe 20.10.2014

1. a) Olkoon $S \subset \mathbb{R}$ epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, ja olkoon $a < 0$. Määritellään

$$aS = \{as \colon s \in S\}.$$

Osoita, että aS on alhaalta rajoitettu ja että

$$\inf(aS) = a\sup(S).$$

b) Olkoon $c > 0$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Osoita, että

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \infty.$$

(Toisin sanoen "$c \cdot \infty = \infty$".)

2. a) Oletetaan, että $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Määritellään $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Missä pisteissä g on jatkuva? Perustele vastauksesi.

b) Olkoon $q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, mikä tahansa toisen asteen polynomi ja $[a, b]$ mikä tahansa suljettu ja rajoitettu väli. Laske differentiaalilaskennan väliarvolauseen piste c välillä $[a, b]$ ja osoita, että c on välin $[a, b]$ keskipiste.