TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-60206 Mathematical analysis Tentti 10.12.2015

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

- Jos haluat suorittaa lopputentin, niin vastaa kaikkiin kysymyksiin 1–4.
- Jos haluat suorittaa 1. välikokeen, niin vastaa vain kysymyksiin 1 ja 2 ja merkitse päällimmäisen vastauspaperisi alkuun "Välikoe 1".
- Jos haluat suorittaa 2. välikokeen, niin vastaa vain kysymyksiin 3 ja 4 ja merkitse päällimmäisen vastauspaperisi alkuun "Välikoe 2".

1. **a)** Oletetaan, että funktiolla $g\colon \mathbb{R}\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ on olemassa

$$\lim_{x\to x_0} g(x) > 0.$$

Osoita raja-arvon $\epsilon\delta$-määritelmää käyttäen, että on olemassa väli $I\subset\mathbb{R}$ siten, että $g(x)>0$ kaikilla $x\in I$.

b) Olkoon $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funktio, jolle pätee

$$-x^2\le f(x)\le x^2$$

kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva 0:ssa ja määritä $f'(0)$.

2. Olkoon $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ rajoitettu funktio, jolle on olemassa välin $[a,b]$ jako P siten, että $S(P)=s(P)$. Osoita, että f on vakiofunktio.

3. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n$$

ei päde funktioille $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$.

4. Kirjoita geometrista sarjaa

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

hyödyntäen potenssisarjaesitys funktiolle

$$\frac{1}{(1+2x)^2}.$$

Millä x:n arvoilla sarjaesityksesi on voimassa?

Jaakko Pihlajasalo

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MAT-60206 Mathematical analysis
Exam, Dec 10, 2015

No calculator. No written material.

- If you want to take the final exam, please answer all of the questions 1–4.
- If you want to take the 1st mid-course exam, please answer only the questions 1 and 2 and write "1st mid-course exam" in the beginning of the first answer sheet.
- If you want to take the 2nd mid-course exam, please answer only the questions 3 and 4 and write "2nd mid-course exam" in the beginning of the first answer sheet.

1. a) Suppose that for the function $g\colon \mathbb{R}\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ there exists

$$\lim_{x\to x_0} g(x) > 0.$$

Show using the $\epsilon\delta$-definition of the limit that there is an interval $I\subset\mathbb{R}$ such that $g(x)>0$ for all $x\in I$.

b) Suppose that the function $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ has the property that

$$-x^2 \le f(x) \le x^2$$

for all $x\in\mathbb{R}$. Prove that f is differentiable at 0 and find $f'(0)$.

2. Suppose that $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ is a bounded function for which there is a partition P of $[a,b]$ such that $S(P)=s(P)$. Show that f is a constant.

3. Show that

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$$

does not hold for the functions $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

4. Use the geometric series

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

to find the power series representation for

$$\frac{1}{(1+2x)^2}.$$

For which x is your series representation valid?