TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-60206 Mathematical analysis (Kauhanen, TD409)
Tentti 10.3.2016

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. Oletetaan, että f ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Asetetaan $h(x) = -2f(x) + g(x)$. Osoita jatkuvuuden $\epsilon\delta$-karakterisointia käyttäen, että h on jatkuva pisteessä x_0.

2. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että f on derivoituva pisteessä x_0 ja että $f'(x_0) > 0$. Osoita, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

(Huomaa, että x_0 saattaa olla ainoa piste, jossa f on derivoituva.)

3. Olkoon $a < b$. Määritellään $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$. Osoita Riemannin ehtoa käyttämällä, että f on integroituva.

4. Vastaa **joko kohtaan (A) tai kohtaan (B)**.[1]

(A) Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^n}.$$

Vihje: tasainen suppeneminen.

(B) Laske funktion $f(x) = \ln(1+x)$ Taylorin sarja 0:n suhteen käyttäen määritelmää

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ja osoita, että sarja suppenee kohti $f(x)$:ää, kun $0 \le x \le 1$. Ohje: jäännöstermi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

[1] Jos molempiin on vastattu, niin arvostelussa huomioidaan huonompi vastaus.

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MAT-60206 Mathematical analysis	(Kauhanen, TD409)
Exam, Mar 10, 2016	

No calculator. No written material.

1. Suppose that f and $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous at $x_0 \in \mathbb{R}$. Define $h(x) = -2f(x) + g(x)$. Show using the $\epsilon\delta$-characterization of continuity that h is continuous at x_0.

2. Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assume that f is differentiable at x_0 and that $f'(x_0) > 0$. Show that there is $\delta > 0$ such that
$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0).$$
(Note that it may be that x_0 is the only point where f is differentiable.)

3. Let $a < b$. Define $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$. Show using Riemann's condition that f is integrable.

4. Answer **either (A) or (B).**[1]

(A) Calculate
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^n}.$$
Hint: uniform convergence.

(B) Calculate the Taylor series of $f(x) = \ln(1+x)$ about 0 using the definition
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$
and show that the series converges to $f(x)$ if $0 \le x \le 1$. Hint: the remainder
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

[1] If you answer both, then the weaker answer is taken into account.