

**Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.**

Jos uusit 1. välikokeen, merkitse päällimmäisen vastauspaperisi alkuun "Välikoe 1" ja vastaa vain kysymyksiin 1 ja 2. Jos uusit 2. välikokeen, merkitse päällimmäisen vastauspaperisi alkuun "Välikoe 2" ja vastaa vain kysymyksiin 3 ja 4. Ilman mainintaa välikokeesta vastaus tulkitaan tentiksi (ja kaikki 4 tehtävää arvostellaan). Kaikki vastaukset palautetaan samaan pinoon.

1. Osoita väite vääräksi antamalla vastaesimerkki tai oikeaksi raja-arvon ϵ -määritelmää käyttäen.

a) Jos lukujono $(a_n^2)_{n=1}^\infty$ suppenee, niin myös lukujono $(a_n)_{n=1}^\infty$ suppenee.

b) Jos lukujono $(a_n)_{n=1}^\infty$ suppenee, niin myös lukujono $(a_n^2)_{n=1}^\infty$ suppenee.

2. a) Oletetaan, että $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä 1. Osoita (derivaatan määritelmää ja raja-arvon ominaisuuksia käyttäen), että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - 2h)}{h}.$$

b) Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva ja olkoon $f'(x) \geq a > 0$ kaikilla $x > 0$. Osoita differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla, että tällöin

$$f(x) \geq f(0) + ax \quad \text{kaikilla } x \geq 0.$$

3. a) Olkoon $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 \leq (b - a) \|P\|.$$

b) Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^1 \frac{2 + \sin(\pi x)}{1 - x} dx ?$$

4. Olkoon $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}.$$

- a) Osoita, että (f_n) suppenee pisteittäin \mathbb{R} :ssä ja määritä rajafunktio f .
b) Onko suppeneminen tasaista? Perustele! Ohje: jatkuvuus.