TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-60200 Matemaattinen analyysi (Kauhanen)
Tentti 12.12.2013

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

Jos uusit 1. välikokeen, merkitse päällimmäisen vastauspaperisi alkuun ”Välikoe 1” ja vastaa vain kysymyksiin 1 ja 2. Jos uusit 2. välikokeen, merkitse päällimmäisen vastauspaperisi alkuun ”Välikoe 2” ja vastaa vain kysymyksiin 3 ja 4. Ilman mainintaa välikokeesta vastaus tulkitaan tentiksi (ja kaikki 4 tehtävää arvostellaan). Kaikki vastaukset palautetaan samaan pinoon (tai tentinvalvojan ohjeen mukaan).

---

1. Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rajoitettu lukujono. Osoita raja-arvon ϵ-määritelmää käyttäen, että lukujono

$$\left(\frac{a_n + 2n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

suppenee.

2. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)^2(x-b)^4$. Laske differentiaalilaskennan väliarvolauseen piste c välillä $[a,b]$.

3. Olkoon P välin $[a,b]$ tasavälinen jako, jossa on n osaväliä. Osoita, että jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on vähenevä funktio, niin

$$S_f(P) - s_f(P) = \frac{(f(a) - f(b))(b-a)}{n}.$$

4. Todista väite lyhyesti sopivia lauseita käyttäen tai osoita väite vääräksi vastaesimerkillä.

a) Jos f ja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia, niin

$$\int_a^b |f+g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|.$$

b) Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, niin

$$\int_a^b f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{jollakin } x \in [a,b].$$

c) Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\int_a^b f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{jollakin } x \in [a,b].$$