



## MAT-60200 Matemaattinen analyysi

1. välikoe 9.10.2013

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. a) Määrittele, mitä tarkoittaa, että funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitettu.  
b) Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu funktio ja oletetaan, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x).$$

2. Olkoon  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  derivoituva funktio,  $f'(x) \leq a < 1$  kaikilla  $x \in (0, \infty)$  ja  $f(0) = 1$ . Määritellään  $g(x) = f(x) - x$ .
- a) Määritä  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ . Ohje: sovelta väliarvolausetta välillä  $[0, x]$ .  
b) Osoita, että  $g$ :llä on täsmälleen yksi nollakohta.

## MAT-60206 Mathematical analysis

1st mid-course exam 9.10.2013

No calculator.

1. a) What does it mean that  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is bounded? Give the definition.  
b) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a bounded function and let

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Show that the limit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$$

exists by using the definition of the limit.

2. Suppose that  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  is differentiable,  $f'(x) \leq a < 1$  for all  $x \in (0, \infty)$  and  $f(0) = 1$ . Let  $g(x) = f(x) - x$ .
- a) Find  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ . Hint: The Mean Value Theorem on the interval  $[0, x]$ .  
b) Show that  $g$  has exactly one zero.