

**MAT-60200 Matemaattinen analyysi**
1. välikoe 9.10.2013

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. a) Määrittele, mitä tarkoittaa, että funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *rajoitettu*.
b) Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja oletetaan, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x).$$

2. Olkoon $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio, $f'(x) \leq a < 1$ kaikilla $x \in (0, \infty)$ ja $f(0) = 1$. Määritellään $g(x) = f(x) - x$.
a) Määritä $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Ohje: sovelta väliarvolausetta välillä $[0, x]$.
b) Osoita, että g :llä on täsmälleen yksi nollakohta.

MAT-60206 Mathematical analysis
1st mid-course exam 9.10.2013

No calculator.

1. a) What does it mean that $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is *bounded*? Give the definition.
b) Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded function and let

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Show that the limit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$$

exists by using the definition of the limit.

2. Suppose that $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable, $f'(x) \leq a < 1$ for all $x \in (0, \infty)$ and $f(0) = 1$. Let $g(x) = f(x) - x$.
a) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Hint: The Mean Value Theorem on the interval $[0, x]$.
b) Show that g has exactly one zero.