

Kirjoita jokaiseen konseptiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Tee tehtävät siististi konsepteille väli-vaiheet perustellen. Ei elektronisia laitteita eikä muistiinpanoja.

Kokeessa saa olla mukana yksi kaksipuolinen A4 käsin kirjoitettu muistilappu.

1. Tarkastellaan matriisia $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, jonka eksponenttimatriisi on

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 2e^t - 2e^{-t} & e^{-t} - e^t \\ 0 & e^{-t} & -t^2e^{-t} - 3te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} + 2te^{-t} \\ 0 & 0 & -2te^{-t} + e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & -4te^{-t} & 2te^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin A ominaisarvot ja näiden algebralliset kertaluvut ja vastaavat ominaisvektorit sekä yleistetyt ominaisvektorit. Onko eksponenttimatriisi stabiili? Mikä on matriisin A Jordanin kanoninen muoto? Etsi matriisia A vastaavat stabiili ja epästabiili aliavaruus E^s ja E^u siten, että

$$\mathbb{R}^4 = E^s \oplus E^u.$$

2. Oletetaan, että matriisilla A on ominaisarvot $1, 1, 2, 1 \pm i2, 1 \pm i2$. Listaa kolme mahdollista matriisin A Jordanin kanonista muotoa (à 1p). Miten muodostat similaarimuunnosmatriisin P jossakin näistä tilanteista? (3p).