MAT-60100 Kompleksimuuttujan funktiot Tentti 17.10.2016

Huom. Ei laskinta, eikä taulukkokirjoja. Kokeessa saa olla kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu. Kaikki paperit (sisältäen muistilapun) palautetaan kokeen lopuksi.

Tentaattori: Petteri Laakkonen

1. a) Esitä kompleksiluku $\frac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ muodossa $x + \mathrm{i}y$, missä $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Esitä kompleksiluku $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ polaarimuodossa.

c) Anna kaikki ne kompleksiluvut z joilla $(z-1)^4 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ ja piirrä ne kompleksitasoon.

d) Osoita itseisarvon ja liittoluvun määritelmistä lähtien, että $|z|^2 = z\overline{z}$.

Ratkaisu:

a) $\dfrac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{-2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{2-2\mathrm{i})}{2} = 1 - \mathrm{i}$

b) $r = |\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}| = 2$ ja $\mathrm{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{4}$ (voi päätellä suoraan kuvasta), joten

$$\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\mathrm{e}^{-\pi/4} = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$$

.

c) $(z-1)^4 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$, joten $z - 1 = \left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^{1/4}$, mistä saadaan

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^{1/4} + 1 \\ &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\pi/4 + 2\pi k}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\pi/16 + k\pi/2} \qquad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Siis yhtälön toteuttaa neljä erillistä kompleksilukua: $z_0 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\pi/16}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{7\pi/16}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{15\pi/16}$ ja $z_3 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{23\pi/16}$. Kompleksitasoon piirrettynä:

d) Koska $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, niin $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |z|^2$.

2. Tarkastellaan funktiota $f(z) = |z|^2 \,\mathrm{e}^z$.

a) Jos $z = x + \mathrm{i}y$, niin esitä funktio f reaali- ja imaginaariosiensa avulla, eli muodossa

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y),$$

missä u ja v ovat reaalisia kahden muuttujan funktioita.

b) Missä pisteissä funtio toteuttaa Cauchy-Riemann yhtälöt?

c) Missä pisteissä funktio on derivoituva? Entä analyyttinen? Perustele väitteesi.

Ratkaisu:

a) $f(z) = (x^2 + y^2) \cdot \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) = \underbrace{(x^2 + y^2)\mathrm{e}^x \cos(y)}_{=:u(x,y)} + \mathrm{i}\,\underbrace{(x^2 + y^2)\mathrm{e}^x \sin(y)}_{=:v(x,y)}$.

b) Cauchy-Riemannin yhtälöiden mukaisesti

$$\begin{aligned}
u_x = v_y &\Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^x \cos(y) + (x^2 + y^2)\mathrm{e}^x \cos(y) = 2y\mathrm{e}^x \sin(y) + (x^2 + y^2)\mathrm{e}^x \cos(y) \\
&\Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^x \cos(y) = 2y\mathrm{e}^x \sin(y) \\
&\Leftrightarrow x \cos(y) = y \sin(y) \qquad (1)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
u_y = -v_x &\Leftrightarrow 2y\mathrm{e}^x \cos(y) - (x^2 + y^2)\mathrm{e}^x \sin(y) = -2x\mathrm{e}^x \sin(y) - (x^2 + y^2)\mathrm{e}^x \sin(y) \\
&\Leftrightarrow 2y\mathrm{e}^x \cos(y) = -2x\mathrm{e}^x \sin(y) \\
&\Leftrightarrow y \cos(y) = -x \sin(y) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Jos $\sin(y) = 0$, niin $\cos(y) \neq 0$ ja (2):n nojalla $y = 0$, mikä on ristiriita. Edelleen (1):n nojalla $x = 0$. Siis CR-yhtälöt toteutuvat origossa.

Jos $\sin(y) \neq 0$, niin $y \neq 0$ ja (1):stä seuraa, että $\cos(y) \neq 0$ ja $x \neq 0$, sekä

$$\sin(y) = \frac{x}{y} \cos(y).$$

Sijoittamalla (2):een saadaan

$$y \cos(y) = \frac{-x^2}{y} \cos(y) \Leftrightarrow y^2 = -x^2,$$

mikä on ristiriita, sillä $y \neq 0$. Täten CR-yhtälöt toteutuvat vain origossa.

c) Koska u_x, v_x, u_y ja v_y ovat jatkuvia, niin funktio on derivoituva niissä pisteissä, joissa CR-ehdot toteutuvat, eli origossa (vrt. kurssimonisteen todistus). Koska funktio on derivoituva vain yhdessä pisteessä ja analyyttisyys pisteessä $z \in \mathbb{C}$ vaatii derivoituvuutta jossain kyseisen pisteen (avoimessa) ympäristössä, niin funktio ei ole analyyttinen missään.

Tarkistetaan vielä derivoituvuus origossa:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|^2 \mathrm{e}^z - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} \cdot \lim_{z \to 0} \mathrm{e}^z = 0 \cdot 1 = 0.$$

Tässä raja-arvo $|z|^2/z \to 0$, kun $z \to 0$, sillä

$$\left| \frac{|z|^2}{z} \right| = |z| \to 0, \text{ kun } z \to 0.$$

3. Määritä integraali
$$\int_S \frac{2z}{z^2+4}\, dz,$$
kun S on

a) kolmio, jonka kärkipisteet ovat 1, -1 ja $3\mathrm{i}$,

b) ympyrä $|z| = 1$,

c) ympyrä $|z| = 10$,

d) jana pisteestä i pisteeseen $-\mathrm{i}$.

Ratkaisu: Merkitään $f(z) = 2z/(z^2+4)$. Integroitava funktio f on analyyttinen kaikissa muissa pisteissä, paitsi nimittäjän z^2+4 nollakohdissa $z = \pm 2\mathrm{i}$.

a) S on nyt sulkeutuva, paloittain sileä tie, joten Cauchyn integraalikaavan nojalla
$$\int_S \frac{2z}{z^2+4}\, dz = \int_S \frac{\frac{2z}{z+2\mathrm{i}}}{z-2\mathrm{i}}\, dz = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{2\cdot 2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Tämän kohdan olisi voinut tehdä myös residylaskentaa käyttäen

b) Integroimistie on sulkeutuva ja sileä ja funktio on analyyttinen kaikkialla integroimistien sisällä. Cauchy-Goursatin lauseen nojalla
$$\int_S \frac{2z}{z^2+4}\, dz = 0.$$

c) Nyt molemmat pisteet $\pm 2\mathrm{i}$ jäävät integroimistien sisään. Funktiolla f on pisteissä $\pm 2\mathrm{i}$ yksinkertainen napa, joten residylauseen nojalla
$$\begin{aligned}
\int_S \frac{2z}{z^2+4}\, dz &= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname*{res}_{z=2\mathrm{i}} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2\mathrm{i}} f(z)\right)\\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to 2\mathrm{i}} ((z-2\mathrm{i})f(z)) + \lim_{z\to -2\mathrm{i}} ((z+2\mathrm{i})f(z))\right)\\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{2z(z-2\mathrm{i})}{z^2+2} + \lim_{z\to -2\mathrm{i}} \frac{2z(z+2\mathrm{i})}{z^2+2}\right)\\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{2z}{z+2\mathrm{i}} + \lim_{z\to -2\mathrm{i}} \frac{2z)}{z-2\mathrm{i}}\right)\\
&= 2\pi\mathrm{i}\,(1+1) = 4\mathrm{i}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

d) Käytetään janan parametrisointia $z(t) = -t\mathrm{i}$, $t = [-1,1]$, jolloin $z'(t) = -\mathrm{i}$. Integraalin määritelmän mukaan
$$\begin{aligned}
\int_S \frac{2z}{z^2+4}\, dz &= \int_{-1}^{1} \frac{-2t\mathrm{i}}{(-t\mathrm{i})^2+4}(-\mathrm{i})\, dt\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{-2t}{4-t^2}\, dt\\
&= \Big/_{-1}^{1} \ln(|4-t^2|) = 0.
\end{aligned}$$

Huomaa, että viimeinen integraali on reaalinen ja osoittajassa on nimittäjän derivaatta.

Huom. Tehtävän voi myös ratkaista etsimällä osamurtokehitelmä $f(z) = 1/(z-2\mathrm{i}) + 1/(z+2\mathrm{i})$ ja käyttämällä sopivia lauseita summan komponenteille.

4. a) Laske funktion $f(z) = \frac{z^2}{3-z}$ Taylorin sarja origossa. Mikä on sarjan suppenemissäde?

b) Olkoon 0 funktion $g(z)$ eristetty erikoispiste. Osoita, että jos funktiolla $g(z)$ on pisteessä $z = 0$ astetta $k > 0$ oleva napa, niin

$$\operatorname*{res}_{z=0} g(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(z^k g(z)\right).$$

Ratkaisu:

a) Geometrisen sarjan avulla

$$f(z) = \frac{z^2}{3-z} = \frac{z^2}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{z^2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+2}}{3^{n+1}}.$$

Muodostettu geometrinen sarja ja siten myös Taylorin sarja suppenee kun $|z/3| < 1$, eli $|z| < 3$ ja hajaantuu muuten. Siis suppenemissäde on $R = 3$ (tämä on myös etäisyys origosta lähimpään pisteeseen, jossa funktio ei ole analyyttinen).

b) Koska funktiolla $g(z)$ on astetta k oleva napa origossa, niin funktiolla $z^k g(z)$ on poistuva erikoispiste origossa[1]. Siis funktio $f(z) = z^k g(z)$ on analyyttinen jossain nolla sopivan pienessä ympäristössä $|z| < r$, kun määrittelemme $f(0) := \lim_{z\to 0} z^k g(z)$.

Olkoon S ympyrä $|z| = r$. Käyttäen Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille saadaan

$$\frac{(k-1)!}{2\pi \mathrm{i}}\int_S g(z)dz = \frac{(k-1)!}{2\pi \mathrm{i}}\int_S \frac{f(z)}{z^k}dz = f^{(k-1)}(0). \tag{3}$$

Koska $f(z)$ on analyyttinen origon ympäristössä, niin sillä on siellä jatkuvat derivaatat. Täten

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z^k g(z)) = \lim_{z\to 0} f^{(k-1)}(z) = f^{(k-1)}(0). \tag{4}$$

Määritelmän mukaan $\mathrm{res}_{z=0} g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_S g(z)dz$, joten (3):n ja (4):n mukaan

$$\operatorname*{res}_{z=0} g(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z^k g(z)).$$

[1] jos et usko, niin kerro funktion $g(z)$ Laurentin sarjaa origossa termillä z^k.