

**MAT-60100 Kompleksimuuttujan funktiot
Tentti 03.02. 2016.**

**Kirjoita koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ja
koulutusohjelmasi. Perustele vastauksesi.**

Ei muistiinpanoja, laskimia, taulukoita.

1. Osoita että jokaisella kompleksiluvulla z pätee

$$\sin z = \cos(\pi/2 - z).$$

2. Onko funktio $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ harmoninen? Myönteisessä tapauksessa muodosta

- a) sen harmoninen liittofunktio $v(x,y)$
- b) analyyttinen funktio, jonka reaaliosa on $u(x,y)$
- c) analyyttinen funktio, jonka imaginaariosa on $u(x,y)$.

3. Muodosta funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+3)}$$

Laurentin sarja pisteessä 2 ($\alpha=2$). Osoita sarjasta funktion $f(z)$ residy pisteessä $z=2$.

4. Laske residyn avulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

5. Määritä funktion $U_a(t)f(t-a)$, missä $U_a(t)$, $a > 0$, on yksikköaskelfunktio, Laplace-muunnos, kun funktio $f(t)$ on Laplace-muuntuva ja sen Laplace-muunnos on $F(s)$.