MAT-60000 Matriisilaskenta (syksy 2018) / Mattila
Tentti 19.10.2018

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. Olkoon $\boldsymbol{u} = (2+i, 5i)$, $\boldsymbol{v} = (2+i, -i)$ ja $\boldsymbol{w} = (5, -1-2i)$ (järjestetyllä parilla (z_1, z_2) tarkoitetaan tässä yhteydessä pystyvektoria $[z_1\ z_2]^T$).

   (a) Laske $\|\boldsymbol{u}\|$ ja $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})^*$. (2p)

   (b) Osoita, että $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^\perp$, missä $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. (2p)

   (c) Mitkä alla olevista joukoista muodostavat kannan vektoriavaruudelle $\mathbb{C}^2$? Perustele vastauksesi, oikeasta vastauksesta ilman riittävää perustelua ei saa pisteitä. (2p)

$$\{\boldsymbol{u}\} \qquad \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \qquad \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\} \qquad \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$$

2. Tarkastellaan 4×6-matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -11 & -1 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 7 & 3 & 14 \end{bmatrix}.$$

   (a) Muodosta LU-hajotelma matriisille A. (3p)

   (b) Päättele (a)-kohdassa lasketun hajotelman avulla $\operatorname{rank}(A)$. Kuinka monta lineaarisesti riippumatonta ratkaisua on homogeenisella yhtälöryhmällä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, missä $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^6$? Entä yhtälöryhmällä $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, missä $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^4$? (3p)

3. (a) Osoita oikeaksi tai vääräksi: jos $\mathcal{S}_1$ ja $\mathcal{S}_2$ ovat vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ aliavaruuksia kantoinaan joukot $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s\}$ ja $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_t\}$, niin joukko

$$\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s\} \cap \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_t\}$$

   on aliavaruuden $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ kanta. (3p)

   (b) Kurssilla osoitettiin, että kompleksinen neliömatriisi P on projektorimatriisi, jos ja vain jos matriisi $I - P$ on projektorimatriisi. Tutki, millä projektorimatriisia P koskevilla ehdoilla myös matriisista $P - I$ tulee projektorimatriisi. Mille aliavaruudelle ja mitä aliavaruutta pitkin $P - I$ tällöin projisoi? (3p)

4. (a) Matriisista $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tiedetään, että se ei ole diagonalisoituva ja että sillä on kaksi eri suurta reaalista ominaisarvoa, jotka ovat 5 ja 6. Millainen Jordanin kanoninen muoto J matriisilla B voi näiden tietojen perusteella olla? Kirjoita näkyviin kaikki mahdolliset vaihtoehdot (jätä matriisin J blokkien järjestys huomiotta). (3p)

   (b) Oletetaan, että matriisille $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on löydetty singulaariarvohajotelma $A = U\Lambda V^*$, missä $\Lambda = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Osoita, että

$$|\det(A)| = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n. \qquad \text{(3p)}$$

   (Ohjeita: yllä $|\det(A)|$ tarkoittaa siis matriisin A determinantin itseisarvoa. Joutunet myös miettimään, mitä voidaan sanoa unitaarisen matriisin determinantin itseisarvosta.)