

MAT-60000 Matriisilaskenta

Tentti (19.10.2016) Henri Hansen

Ei laskimia, ei kirjallisuutta. Vastaa *neljään* seuraavista kysymyksistä.

1. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelma ja laske $\det(A)$.

2. Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit.

3. Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Singulaariarvohajotelma. Kerro miten $\text{rank}(A)$ ja $\|A\|$ näkyvät hajotelmasta.

4. (a) Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on ei-singulaarinen jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.
- (b) Olkoon $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ja olkoon $\text{rank}(A) = n$. Mitä voidaan sanoa matriisiyhtälön $Ax = b$ ratkaisun olemassaolosta tapauksissa $m > n$ ja $m = n$?
- (c) Osoita oikeaksi tai vääräksi: Jos $\{x_1, \dots, x_p\}$ on aliavaruuden $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$ kanta ja $\{y_1, \dots, y_q\}$ on aliavaruuden $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^n$ kanta, niin $\{x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q\}$ on aliavaruuden $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ kanta.

5. Muistetaan, että matriisinormi määritellään

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- (a) Osoita, että $\|A\| = 0$ vain jos $A = 0$.
- (b) Osoita, että jos $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on unitaarinen, niin $\|U\| = 1$.
- (c) Osoita, että jos $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, niin $\|A\|$ on matriisin A suurin singulaariarvo. (Vihje, A^*A :n ominaisarvo...)
6. Osoita, että jos $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on projektiomatriisi, niin $I - P$ on myös projektiomatriisi, ja että $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$.