MAT-60000 Matriisilaskenta (syksy 2018) / Mattila
Tentti 17.1.2019

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Olkoot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. Selvitä, mikä yhteys on vektoritulojen $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x}$ välillä. (2p)

   (b) Olkoon $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m\}$ lineaarisesti riippuva joukko avaruuden $\mathbb{C}^n$ vektoreita. Osoita määritelmään nojautuen, että ainakin yksi vektori $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{S}$ voidaan lausua muiden (eli joukon $\mathcal{S} \setminus \{\boldsymbol{x}_i\}$) vektoreiden lineaarikombinaationa. (2p)

   (c) Osoita oikeaksi tai vääräksi: joukko $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq 0 \right\}$ (eli x-akseli yhdessä sen yläpuolelle jäävän puolitason kanssa) on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. (2p)

2. (a) Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, joille on voimassa $\det(A) = 4$ ja $\det(B) = -3$. Päättele näiden tietojen avulla seuraavien determinanttien arvot: (i) $\det(AB)$, (ii) $\det(3A)$, (iii) $\det(B^TB)$, (iv) $\det(A^{-1})$, (v) $\det(A^3)$, (vi) $\det(B^{-1}AB)$. (3p)

   (b) Osoita pääalideterminanttien avulla, että matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

   ei ole olemassa LU-hajotelmaa. Etsi tämän jälkeen jokin tapa järjestellä matriisin A rivit uudelleen niin, että permutoidulle matriisille on olemassa LU-hajotelma (itse hajotelmaa ei tarvitse laskea). (3p)

3. (a) Päättele seuraavien matriisien asteet sekä niiden ytimien (eli nolla-avaruuksien) dimensiot:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{(3p)}$$

   (b) Olkoon $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta ja olkoon P sellainen projektorimatriisi, joka projisoi avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudelle $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ pitkin aliavaruutta $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_3\}$. Perustele, miksi vektorit $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{x}_3$ ovat kaikki matriisin P ominaisvektoreita. Mitkä ovat niitä vastaavat ominaisarvot? Kerro myös, onko matriisi P kääntyvä ja/tai diagonalisoituva. (3p)

4. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Jordanin kanoninen muoto J sekä hajotelmassa esiintyvä matriisi S. (6p)
   (Ohje: Huomaa, että matriisi S ei ole yksikäsitteinen. Riittää siis löytää jokin sellainen matriisi S, jonka välityksellä matriisit A ja J ovat similaarisia.)