MAT-60000 Matriisilaskenta (syksy 2017) / Mattila
Tentti 16.10.2017

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Muodosta LU-hajotelma matriisille A ja määritä sen avulla $\det(A)$. (3p)

   (b) Ratkaise LU-hajotelmaa apuna käyttäen yhtälöryhmä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, missä
$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \end{bmatrix}^T. \qquad \text{(3p)}$$

2. (a) Oletetaan, että $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ on avaruuden $\mathbb{C}^3$ kanta. Osoita oikeaksi tai vääräksi: joukko $\{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\}$ on myös avaruuden $\mathbb{C}^3$ kanta. (2p)

   (b) Olkoon $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermiittinen matriisi. Osoita, että
$$\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(B) = \{\boldsymbol{0}\}. \qquad \text{(2p)}$$

   (c) Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaarinen matriisi. Osoita, että jos vektorijoukko
$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \subset \mathbb{C}^n$$
   on ortonormaali, niin samoin on joukko
$$\{U\boldsymbol{x}_1, U\boldsymbol{x}_2, \ldots, U\boldsymbol{x}_n\}. \qquad \text{(2p)}$$

3. (a) Olkoon $\boldsymbol{x} = [1\ 1\ 1]^T$. Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortogonaaliprojektiomatriisi P aliavaruudelle $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}\}$ käyttämällä apuna kaavaa
$$P = X_1(X_1^* X_1)^{-1} X_1^*,$$
   missä $X_1 = [\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x}$. Mitä aliavaruutta pitkin projisointi tapahtuu? (3p)

   (b) Kompleksisesta neliömatriisista A tiedetään, että se on similaarinen blokkidiagonaalimatriisin
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$$
   kanssa. Päättele tämän tiedon avulla matriisin A ominaisarvot, niiden algebralliset kertaluvut sekä kutakin ominaisarvoa vastaavien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien lukumäärä. Onko A kääntyvä? (3p)

4. Etsi singulaariarvohajotelma matriisille
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
   ja päättele hajotelman avulla $\operatorname{rank}(A)$ ja $\|A\|$. (6p)