

MAT-60000 Matriisilaskenta 1

Välikoe 1 (6.10.2014) luennoitsija: Lassi Paunonen.

Ei laskimia, ei kirjallisuutta.

1. (a) Määrittele matriisin A ei-singulaarisuus ja inverssi.

(b) Onko vektorijoukko $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, missä

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ortogonaalinen ja/tai ortonormaali?

(c) Olkoot $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Osoita, että $(A + B)(A - B) = AA - BB$ jos ja vain jos matriisit A ja B kommutoivat.

2. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ -8 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelma ja osoita, että A on ei-singulaarinen.

3. (a) Määrittele vektorijoukon $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{F}^n$ lineaarinen riippumattomuus.

(b) Oletetaan, että vektorit $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \subset \mathbb{C}^n$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Osoita, että myös vektorit $\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\}$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

4. (a) Määrittele avaruuden \mathbb{F}^n aliavaruus.

(b) Määrittele $\mathcal{R}(A)$ ja $\mathcal{N}(A)$ matriisille $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

(c) Olkoot $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ja $B \in \mathbb{F}^{p \times n}$. Osoita määritelmien avulla, että $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$ on \mathbb{F}^n :n aliavaruus.