MAT-60000 Matriisilaskenta 1

Välikoe 2 (2.12.2013) luennoitsija: Lassi Paunonen.

Ei laskimia, ei kirjallisuutta.

1. Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ reaalinen Jordanin kanoninen muoto $A = SJS^{-1}$, missä

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Päättele kanonisesta muodosta matriisin A

(a) Ominaisarvot

(b) Ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut

(c) Ominaisarvoihin liittyvät lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit

(d) Yleistetyt ominaisvektorit.

2. Todista, että matriisi

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

on ortogonaaliprojektorimatriisi. Mille avaruudelle P projisioi, ja mitä aliavaruutta pitkin? Etsi näille aliavaruuksille kannat.

3. Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

singulaariarvohajotelma $A = U\Lambda V^*$. $\boxed{\text{Laske } \|A\|.}$

4. (a) Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Osoita, että matriisi $A - \lambda I$ on ei-singulaarinen täsmälleen silloin, kun $\lambda \notin \sigma(A)$.

(b) Olkoon $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ei-singulaarinen ja olkoot $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ sen ominaisarvot. Etsi matriisin A^{-1} ominaisarvot.