MAT-53101 Numeerinen analyysi 2 tentti 3.5.2010
MAT-53107 Numerical Analysis 2 Exam 3.5.2010

Tentissä saa käyttää tavallista tai graafista/ohjemoitavaa laskinta ja yhtä käsinkirjoitettua kaksipuolista A4-paperia muistiinpanoja. Laskuissa välivaiheet on kirjoitettava näkyviin.

You are allowed to use a plain or graphing/programmable calculator and one handwritten two-sided A4 sheet of notes. Show all calculation steps.

1. IEEE-perustarkkuusliukulukujärjestelmän tunnusluvut ovat $(\beta, t, L, U) = (2, 23, -126, 127)$. Mikä on suurin positiivinen normaalisoitu liukuluku tässä järjestelmässä? Todista, että jos $\bar{x}$ on lukua $x = 12\pi$ lähin oleva IEEE-perustarkkuusliukuluku, niin $\left|\frac{x-\bar{x}}{x}\right| \leq 2^{-24}$.

   The IEEE single precision floating point number system has $(\beta, t, L, U) = (2, 23, -126, 127)$. What is the largest positive normalised finite number in this system? Prove that if $\bar{x}$ is the IEEE single precision number that is closest to $x = 12\pi$, then $\left|\frac{x-\bar{x}}{x}\right| \leq 2^{-24}$.

2. Encken satelliitin radan laskumenetelmä vaatii funktion

   $$f(x) = \frac{1-(1-2x)^{-3/2}}{x}$$

   $p = -\frac{3}{2}$

   $z = -2x$

   evaluoinnin. Etsi sarjaesitys, joka mahdollistaa funktion laskemisen tarkasti pienellä x. Montako termiä osasummasta antaa 4 oikeaa desimaalia, kun $-\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{100}$? Vihje: $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}z^3 + \cdots$ kun $|z| < 1$.

   Encke's method for computing the orbit of a satellite requires the evaluation of the function

   $$f(x) = \frac{1-(1-2x)^{-3/2}}{x}$$

   Find a series representation that allows the function to be computed accurately for small x. How many terms of the partial sum will give an approximation with 4 correct decimals for $-\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{100}$? Hint: $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}z^3 + \cdots$ for all $|z| < 1$.

3. Laske *monimuuttujaisen* Newtonin ja Raphsonin menetelmän kaksi iteraatiota yhtälöryhmän $3x_1^2 = x_2^2$, $4x_1x_2^2 = x_1 + 1$ ratkaisemiseksi lähtien alkuarvosta $x^{[0]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Perform two iterations of the *multivariable* Newton-Raphson method to solve $3x_1^2 = x_2^2$, $4x_1x_2^2 = x_1 + 1$ with initial iterate $x^{[0]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

jatkuu sivun toisella puolella / continued on other side

4. Johda interpoloivan kuutiosplinin yhtälöt

$$h_{i+1}g_{i-1}+2(h_i+h_{i+1})g_i+h_ig_{i+1} = \frac{3h_{i+1}(f_i - f_{i-1})}{h_i}+\frac{3h_i(f_{i+1} - f_i)}{h_{i+1}} \quad (i \in \{1,\ldots,n-1\})$$

Vihje: Hermiten kuutiopolynomi, joka interpoloi $f_i = f(x_i)$ ja $g_i = f'(x_i)$, noudattaa välillä $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ kaavaa

$$s(x) = (1+2u_i)(1-u_i)^2 f_{i-1} + (3-2u_i)u_i^2 f_i + u_i(1-u_i)^2 h_i g_{i-1} + (u_i - 1)u_i^2 h_i g_i,$$

jossa $h_i = x_i - x_{i-1}$ ja $u_i = (x - x_{i-1})/h_i$.

Derive the interpolating cubic spline's equations

$$h_{i+1}g_{i-1}+2(h_i+h_{i+1})g_i+h_ig_{i+1} = \frac{3h_{i+1}(f_i - f_{i-1})}{h_i}+\frac{3h_i(f_{i+1} - f_i)}{h_{i+1}} \quad (i \in \{1,\ldots,n-1\})$$

Hint: the Hermite cubic polynomial that interpolates $f_i = f(x_i)$ and $g_i = f'(x_i)$ is defined on the interval $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ by the formula

$$s(x) = (1+2u_i)(1-u_i)^2 f_{i-1} + (3-2u_i)u_i^2 f_i + u_i(1-u_i)^2 h_i g_{i-1} + (u_i - 1)u_i^2 h_i g_i,$$

where $h_i = x_i - x_{i-1}$ and $u_i = (x - x_{i-1})/h_i$.