Koska lineaariyhtälö on kvasilineaarinen, sitä voidaan aina analysoida ja ratkaista Kohdan 2.4 menetelmällä eli Lagrangen metodilla. Eräissä tapauksissa lineaariyhtälölle (2.31) voidaan konstruoida *yleinen ratkaisu*, ts. ratkaisun esitysmuoto, jossa esiintyy yksi mielivaltainen $C^1(G)$-funktio. Usein *koordinaatiston muunnos* auttaa yleisen ratkaisun löytämisessä. Tutkimme seuraavan lemman jälkeen tapausta $n = 2$.

Lemma 2.1 *Oletetaan, että $g : G \to \tilde{G}$; $G, \tilde{G} \Subset \mathbb{R}^n$ on diffeomorfismi. Tällöin $u \in C^1(G)$ on yhtälön (2.31) ratkaisu jos ja vain jos $\tilde{u} := u \circ g^{-1}$ on yhtälön*

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\langle \tilde{a}, (\nabla g_j) \circ g^{-1} \rangle\right](\xi) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_j} + \tilde{a}_0(\xi)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi) \tag{2.32}$$

ratkaisu, missä $\tilde{a} := (a_1 \circ g^{-1}, ..., a_n \circ g^{-1})$, $\tilde{a}_0 := a_0 \circ g^{-1}$ ja *$\tilde{f} := f \circ g^{-1}$.*

TODISTUS. A. Koska $u = \tilde{u} \circ g$, niin

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_j} \circ g \right) \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \right)(x).$$

Siten, jos u on yhtälön (2.31) ratkaisu niin

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_j} \circ g \right) \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \right] + a_0 u \right\} \circ g^{-1}(\xi) = (f \circ g^{-1})(\xi)$$

eli kun merkitään $\tilde{a}_k := a_k \circ g^{-1}$, saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k(\xi) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} \circ g^{-1} \right)(\xi) \right] \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_j} + \tilde{a}_0(\xi)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi),$$

mistä väitös (2.32) välittömästi seuraa.
B. Käänteinen väite osoitetaan vastaavasti (harj.). □

Oletetaan, että $n = 2$. Tällöin u on yhtälön

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{2.33}$$

ratkaisu jos ja vain jos $\tilde{u} = u \circ g^{-1}$ on yhtälön

$$\begin{gathered} \langle (a \circ g^{-1}, b \circ g^{-1}), (\nabla g_1) \circ g^{-1} \rangle \tfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1} \\ + \langle (a \circ g^{-1}, b \circ g^{-1}), (\nabla g_2) \circ g^{-1} \rangle \tfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_2} + \tilde{c}(\xi)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi) \end{gathered}$$

ratkaisu eli jos ja vain jos

$$\left(\left[a\tfrac{\partial g_1}{\partial x} + b\tfrac{\partial g_1}{\partial y} \right] \circ g^{-1} \right) \tfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1} + \left(\left[a\tfrac{\partial g_2}{\partial x} + b\tfrac{\partial g_2}{\partial y} \right] \circ g^{-1} \right) \tfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_2} + \tilde{c}(\xi)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi). \tag{2.34}$$

Pyritään valitsemaan g siten, että $g_1(x,y) = x$ ja

$$a\frac{\partial g_2}{\partial x} + b\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0. \tag{2.35}$$

Oletetaan, että $a(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in G$. Jos $g_2(x,y) = C$ määrittelee differentiaaliyhtälön

$$y' = \frac{b}{a}(x,y) \tag{2.36}$$

implisiittisen ratkaisun y, niin

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow a\frac{\partial g_2}{\partial x} + b\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

eli g_2 toteuttaa tällöin yhtälön (2.35).

Oletamme, että $g(x,y) = (x, \psi(x,y))$ määrittelee diffeomorfismin $G \to \tilde{G}$, missä ψ on yhtälön (2.36) (jokin) implisiittinen ratkaisu. On siis huolehdittava siitä, että g on bijektio ja että Jacobin determinantti

$$J_g(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 \psi & \partial_2 \psi \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) \neq 0, \ \forall (x,y) \in G.$$

Tällöin yhtälö (2.34) saa muodon

$$\tilde{a}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1} + \tilde{c}\tilde{u} = \tilde{f}(\xi)$$

eli

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1} + \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}(\xi)\tilde{u} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{a}}(\xi), \ \xi \in \tilde{G}. \tag{2.37}$$

Yhtälöstä (2.37) saadaan välittömästi $\tilde{u}$

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = e^{\left(-\int^{\xi_1} \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}(t,\xi_2)dt\right)} \left[\int^{\xi_1} \frac{\tilde{f}}{\tilde{a}}(t,\xi_2) e^{\left(\int^{t} \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}(s,\xi_2)ds\right)} dt + F(\xi_2) \right], \tag{2.38}$$

missä $F \in C^1(\mathbb{R})$. Merkintä $\int^x f(t)dt$ tarkoittaa kuvauksen f integraalifunktiota pisteessä x, ts. $\int^x f(t)dt := \int f(x)dx$. Koska $g(x,y) = (x, \psi(x,y))$, relaatiosta (2.38) seuraa

$$u(x,y) = \tilde{u}(x, \psi(x,y)) = \frac{1}{v(x, \psi(x,y))} \left[w(x, \psi(x,y)) + F(\psi(x,y)) \right], \tag{2.39}$$

missä

$$v(x,z) = e^{\int^x \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}(t,z)dt} \text{ ja } w(x,z) = \int^x \frac{\tilde{f}}{\tilde{a}}(t,z)v(t,z)dt.$$