MAT-33351 Vektorikentät 1. välikoe 8.3.2013

Sali Sb204, klo 12–15

Huom! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Laskuvälineet ovat sallittuja. Poistua saa aikaisintaan 12.30.

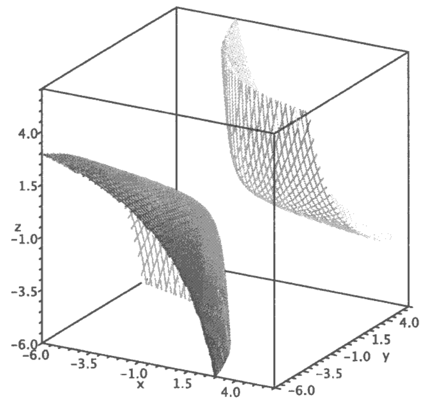
1. **a)** Totea, että uraehto

$$xy + yz + xz = 1$$

määrittää $\mathbb{R}^3$:n moniston $\mathcal{M}$, jossa on piste $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 0)$. (Ks. oheinen kuva: Maple.)

b) Etsi $\mathcal{M}$:n tangentti- ja normaaliavaruudet pisteessä $\mathbf{p}_0$.

(Kyseessä on eräs kaksivaippainen hyperboloidi.)



2. Laske $\mathbb{R}^4$:n 2-muotokentän

$$\Phi = (2x_1^2 - x_2 + x_4)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_4 - 3(x_1^2 + x_3^2)x_4\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

arvo $\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, kun $\mathbf{p}_0$ on piste $(2, -1, -1, 2)$ ja

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{sekä} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Laske Faradayn muotokentän ja Maxwellin muotokentän kiilatulo $\Phi_{\text{Faraday}} \wedge \Phi_{\text{Maxwell}}$ mahdollisimman sievässä muodossa. (Perustele tarkasti kaikki laskun vaiheet!)

(Lopputulos on sekin tunnettu muotokenttä, joka liittyy energian säilymiseen.)

Kaavoja ⟶⟶⟶

Kaavoja:

Skalaarikolmitulon kiertosääntö:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \bullet \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Vektorikolmitulon ja kaksoisroottorin kehityskaavat:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})\mathbf{a} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} \end{aligned}$$

Sylinterikoordinaatistomuunnos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}(r, \phi, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)\ , \quad \det\big(\mathbf{h}'(r, \phi, z)\big) = r$$

Pallokoordinaatistomuunnos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}(\rho, \theta, \phi) = (\rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\theta)\ , \quad \det\big(\mathbf{h}'(\rho, \theta, \phi)\big) = \rho^2\sin\theta$$

Tulon derivointisäännöt:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\ \nabla \bullet (f\mathbf{G}) &= \nabla f \bullet \mathbf{G} + f\nabla \bullet \mathbf{G} \\ \nabla \times (f\mathbf{G}) &= \nabla f \times \mathbf{G} + f\nabla \times \mathbf{G} \\ \nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G} \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G} + (\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F} - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} \\ \nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) &= \mathbf{F}'^{\mathrm{T}}\mathbf{G} + \mathbf{G}'^{\mathrm{T}}\mathbf{F} \\ &= (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \\ \mathrm{d}(\Phi \wedge \Psi) &= (\mathrm{d}\Phi) \wedge \Psi + (-1)^k \Phi \wedge (\mathrm{d}\Psi) \quad \text{(Cartanin taikakaava)} \\ (\mathrm{d}\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \Phi'(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}_i}, \mathbf{r}_{i+1}, \ldots, \mathbf{r}_{k+1})\mathbf{r}_i \end{aligned}$$

$k+1$-muotokentän Φ potentiaali tähtimäisessä alueessa pisteen $\mathbf{p}_0$ suhteen:

$$(\mathrm{I}\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k) = \int_0^1 t^k \Phi\big(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0); \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k\big)\, \mathrm{d}t.$$

Maxwellin yhtälöt:

$$\text{(M1)}\ \nabla \bullet \mathbf{D} = \rho \qquad \text{(M2)}\ \nabla \bullet \mathbf{B} = 0$$

$$\text{(M3)}\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(M4)}\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\left(\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}\quad , \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}\quad , \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}\quad , \quad \nabla \bullet \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Faraday}} &= E_1 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t + E_2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + E_3 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + B_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \Phi_{\mathbf{E}\text{-work}} \wedge \mathrm{d}t + \Phi_{\mathbf{B}\text{-flux}} \qquad \text{(Faradayn muotokenttä)} \\ \Phi_{\text{Maxwell}} &= -c^2 B_1 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t - c^2 B_2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t - c^2 B_3 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + E_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + E_2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + E_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \Phi_{\mathbf{E}\text{-flux}} - c^2 \Phi_{\mathbf{B}\text{-work}} \wedge \mathrm{d}t \qquad \text{(Maxwellin muotokenttä)} \end{aligned}$$