MAT-20501 Todennäköisyyslaskenta / Kaleva
Tentti 24.1.2013

Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja eikä kirjallisuutta. Kaikki laskimet ovat sallittuja.

Piirrä pääkonseptiin nimen alle peräkkäin neljä suorakaidetta

1. Uurnassa on 10 palloa, joista 5 on mustaa, 3 valkoista ja 2 punaista. Otetaan satunnaisesti 3 palloa, pallo kerrallaan. Laske todennäköisyys, että 1. pallo on musta, 2. pallo valkoinen ja 3. pallo punainen, kun

a. nostettu pallo palautetaan uurnaan,
b. nostettua palloa ei palauteta uurnaan.

2. Olkoon $\mathbf{x}$ diskreetti satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

x_i	0	1	2	3
$f_{\mathbf{x}}(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Merkitään $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} + 3$. Laske $\mathbb{E}(\mathbf{y})$ ja $\mathrm{Var}(\mathbf{y})$.

3. Oletetaan, että satunnaismuuttujien $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8}, & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

a. Laske reunajakauman tiheysfunktio $f_{\mathbf{x}}$. Piirrä tiheysfunktion kuvaaja.
b. Laske reunajakauman kertymäfunktio $F_{\mathbf{x}}$. Piirrä kertymäfunktion kuvaaja.
c. Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 \le 1)$.

4. Olkoon $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ otos jakaumasta, jonka odotusarvo on μ ja varianssi $\sigma^2 = 1$ sekä $\bar{\mathbf{x}}$ otoskeskiarvo. Arvioi keskeisen raja-arvolauseen avulla, kuinka suuri otoskoko n tarvitaan, että

$$\mathbb{P}(\bar{\mathbf{x}} - \mu \ge \tfrac{1}{2}) \le 0.01.$$

Anna vastaus Φ^{-1}-funktion avulla.