MAT-20501 Todennäköisyyslaskenta

Tentti 19.10.2011

- **Vastaa jokainen tehtävä eri paperille.**
- **Funktiolaskin sallittu.**

---

1. **a)** Yksinkertaisessa lotossa arvotaan palauttamatta 3 numeroa luvuista $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ja pelaaja voittaa valitsemalla kaikki 3 numeroa oikein. Pelaaja X haluaa voittaa 100%:n todennäköisyydellä ja valitsee siksi systemaattisesti kaikki erilaiset 3 numeron rivit. Kuinka monta riviä hän pelaa?
Pelaaja Y ei ole systemaattinen, vaan valitsee aina yhden rivin arpomalla 3 lukua luvuista $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Kun Y pelaa yhtä monta riviä kuin X, niin millä todennäköisyydellä Y voittaa ainakin kerran?

b) Olkoon A ja B saman otosavaruuden Ω tapahtumia ja $A \cup B = \Omega$.
Jos A ja B ovat riippumattomia ja $P(A) = 2P(B)$, niin mitä on $P(B)$?

2. **a)** Satunnaiskävelijä RW lähtee liikkeelle origosta $(0,0)$ ja ottaa kerran sekunnissa askeleen joko pohjoiseen, itään, etelään tai länteen. Jokainen suunta on yhtä todennäköinen ja askeleet ovat toisistaan riippumattomia. Satunnaismuuttuja D on RW:n suora etäisyys lähtöpisteestä kahden askeleen jälkeen. Mikä on D:n otosavaruus, tiheysfunktio, odotusarvo ja varianssi.
b) Jos viisi a)-kohdan toisistaan riippumatonta satunnaiskävelijää lähtee matkaan origosta samalla hetkellä, millä todennäköisyydellä ainakin kaksi heistä on takaisin origossa kahden askeleen jälkeen?

3. Satunnaisvektorin (X,Y) tiheysfunktio $f(x,y) = 6xy, \quad 0 \le x^2 \le y \le 1$

a) Määritä komponentin X tiheysfunktio $f_1(x)$ ja laske $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right)$.

b) Laske ehdollinen todennäköisyys $P\left(Y \le \frac{1}{2} \;\middle|\; X \ge \frac{1}{2}\right)$.

4. Lampun kestoikä tunneissa $X \sim \mathrm{N}(1500, 200^2)$

a) Millä todennäköisyydellä yksi lamppu kestää vähintään 1430 tuntia?
b) Lampputestiin otettiin 100 lamppua. Tutkitaan otoskeskiarvoa $\overline{X}$. Määritä sellainen luku c, että $P(\overline{X} \le c) = 0.01$.
Testissä saatiin otoskeskiarvoksi 1430 tuntia. Onko testin perusteella jakauman odotusarvo edelleen 1500 tuntia?