



Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja eikä kirjallisuutta. Kaikki laskimet ovat sallittuja.

1. Urnassa on b sinistä ja r punaista palloa, $r, b \geq 2$. Urnasta poimitaan satunnaisesti 4 palloa pallo kerrallaan palauttamatta niitä urnaan.

- Millä todennäköisyydellä 2. pallo on punainen?
- Millä todennäköisyydellä saadaan tulos *1. pallo on sininen, 2. pallo on punainen, 3. pallo on sininen ja 4. pallo on punainen*?

Vihje: kun merkitsemme $B_1 = 1.$ pallo on sininen, $R_2 = 2.$ pallo on punainen, $B_3 = 3.$ pallo on sininen ja $R_4 = 4.$ pallo on punainen, niin on laskettava

$$\mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4).$$

2. Satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \begin{cases} c(1-x)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- Määää vakio c .
- Laske $\mathbb{P}(\mathbf{x} \leq \frac{1}{2})$.

3. Seuraavassa taulukossa on annettu diskreetin satunnaisvektorin $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ tiheysfunktio $f_{\mathbf{z}}(x_i, y_j)$.

$x \ y$	-2	-1	1	2
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0

- Muodosta reunajakaumien tiheysfunktiot $f_{\mathbf{x}}$ ja $f_{\mathbf{y}}$.
- Laske odotusarvo $\mathbb{E}(\mathbf{y})$.
- Laske varianssi $\text{Var}(\mathbf{y})$.

4. Olkoon $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{15}$ otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{kun } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

ja $\bar{\mathbf{x}}$ otoskeskiarvo. Arvioi keskeisen raja-arvolauseen avulla todennäköisyyttä

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{10} \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \frac{1}{5}\right).$$

Anna vastaus Φ -funktion avulla.