MAT-20451 Fourier'n menetelmät

Tentti 18.4.2011

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Olkoon T-jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päättele seuraavasti: integroi yhtälö

$$f(t)\cos(2\omega t) = \frac{1}{2}a_0 \cos(2\omega t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t)\cos(2\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\cos(2\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \ldots dt$ ja oleta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida yhteenlaskettava kerrallaan. Päättele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo hyödyntäen integroitavan parittomuus ja alla oleva *Vihje 3*.

(Yhdelle sarjan kertoimista pitäisi näin syntyä laskukaava.)

2. Laske funktion Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

kun $f(t) = |\cos(t)|$. Muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Vihje 1: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päättele sen avulla T sekä ω.

Vihje 2: Integroitava parillinen tai pariton ja reaalinen.

Vihje 3: $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Vihje 4: $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

Käännä!