MAT-20451 Fourier'n menetelmät Tentti 7.3.2012

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Olkoon T-jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Laske seuraavasti: integroi ensin yhtälö

$$f(t)\cos(3\omega t) = \frac{1}{2}a_0 \cos(3\omega t) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t)\cos(3\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\cos(3\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \ldots dt$ ja yhtälön oikea puoli yhteenlaskettava kerrallaan.
Laske oikean puolen integraalien summa päättelemällä arvo jokaiselle sen integraalille apuna integroitavan parittomuus ja alla oleva *Vihje 2*.

(Yhdelle sarjan kertoimista tuisi näin laskukaava.)

2. Laske funktion Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

kun $f(t) = \cos(t)$. Muodosta näistä lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Vihje 1: Integroitava parillinen tai pariton ja integrointiväli origokeskinen.

Vihje 2: $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Käännä!

3. Tunnetaan Fourier-muunnos $F(\mathrm{j}\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T)$ tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} = A\,[H(t+T) - H(t-T)]$$

Päättele Fourier-muunnos

a) tasapulssille $g(t) = H(t) - H(t-6)$,

b) ikkunoidulle sinille $x(t) = \sin(4t)\,[H(t) - H(t-6)]$.

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega - a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.

Tiedetään lisäksi, että $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$,

joten $e^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x} = 2\cos x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x} = 2\mathrm{j}\sin x$.

4. Johda symmetriaominaisuuden avulla Fourier-muunnos

a) ensin funktiolle $y(t) = \mathrm{sinc}(12t)$,

b) sitten funktiolle $z(t) = \mathrm{sinc}(12t - 36)$.

c) Sievennä **b**-kohdassa saadun muunnoksen itseisarvo eli amplitudi mahdollisimman yksinkertaiseksi.