MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 28.11.2008

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Hahmottele π-jaksoiseksi jatketun funktion $f(t) = \cos(t)$ $(0 \le t < \pi)$ kuvaajaa. Laske funktion $f(t)$ (jatketun version) parittomuutta hyödyntäen sen Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - \mathrm{j} \int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t}.$$

Vihje: $2\cos(t)\sin(mt) = \sin(m-1)t + \sin(m+1)t$.

2. Funktiolle $g(t) = \sin(t)$ $(-\pi/2 \le t < \pi/2)$ jatkettuna π-jaksoiseksi tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{j}4n}{\pi}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} e^{\mathrm{j}2nt},$$

a) Muodosta tästä funktion $g(t)$ Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$

missä

$$\frac{1}{2}a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = \mathrm{j}(c_n - c_n^*) \qquad (n \ge 1)$$

b) Olisiko funktion $g(t)$ Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja (jos se muodostettaisiin) derivaatan $g'(t)$ Fourier-sarja? Perustele.

Käännä!