MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 23.03.2007

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaisen tehtävän vastaus ERI PAPERILLE.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Funktiolle $f(t) = |\sin(t)|$ tunnetaan (kirjan esimerkistä) Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)$$

a) Muodosta tästä Fourier-sarja funktiolle $g(t) = \frac{1}{2}(|\sin(t)| + \sin(t))$, joka on ns. leikattu siniaalto eli puoliaalloksi tasasuunnattu siniaalto

$$g(t) = \begin{cases} \sin(t) & (0 < t < \pi) \\ 0 & (\pi \le t \le 2\pi) \end{cases} \qquad \text{jatkettuna } 2\pi\text{-jaksoiseksi.}$$

b) Hahmottele a-kohdan funktion $g(t)$ kuvaaja välillä $-2\pi \le t \le 2\pi$. Mikä on (tai olisi) a-kohdan sarjan summa pisteessä $t = -\pi$ ja miksi?

2. Laske (tyhjästä) funktiolle $h(t) = \sin(t)$ kompleksinen Fourier-sarja

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad \text{missä} \quad c_n = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} h(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_d^{d+T} h(t)\sin(n\omega t)\,dt\right).$$

Vihje 1: Integroitava parillinen tai pariton.
Vihje 2: $2\sin(t)\sin(nt) = \cos(n-1)t - \cos(n+1)t$.
Vihje 3: Tapaukset $n = \pm 1$ menevät hieman muista poiketen.

3. Tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

tiedetään Fourier-muunnos $F(j\omega) = 2AT\,\mathrm{sinc}(\omega T)$. Johda muunnos 'off-on-off' -pulssille

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < -2) \\ -1 & (-2 \le t < -1) \\ 1 & (-1 \le t \le 1) \\ -1 & (1 < t \le 2) \\ 0 & (t > 2) \end{cases}$$

pitäen sitä tasapulssien summana tai erotuksena ja sievennä tulos mahdollisimman pitkälle.

Apuna: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\} = F(j(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$ ja $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(j(-\omega))$.

4. Jaksottoman funktion $f(t)$ ja sen Fourier-muunnoksen välille tunnetaan Parsevalin yhtälö

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,d\omega$$

Ja tunnetaan Fourier-muunnos $F(j\omega) = AT\,\mathrm{sinc}^2(\omega T/2)$ kolmiopulssille

$$f(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \le t \le 0) \\ (-A/T)t + A & (0 \le t \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

Johda näistä arvo integraalille

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^4(\omega)\,d\omega$$

$\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \frac{t}{4}$

D cos = - sin $\quad$ ∫ sin = - cos
D sin = cos $\quad$ ∫ cos = sin