MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 20.03.2006

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
Kirjoita papereihin nimesi, numerosi ja koulutusohjelmasi.

1. Funktiolle $f(t) = |\sin(t)|$ tunnetaan (kirjan esimerkistä) Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)$$

a) Muodosta tästä Fourier-sarja funktiolle $g(x) = |\cos(x)|$ yhtälön $\cos(x) = \sin(x+\pi/2)$ avulla. [4 pistettä]

Ohje: Muuttujan vaihto $t = x+\pi/2$ funktioon ja sen sarjaan näyttää ensi vilkaisulla muuttavan sarjan pois Fourier-sarjan rakenteesta. Varmista a-kohdassa, että näin ei kuitenkaan käy, käyttäen sopivampaa kaavoista

$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$, $\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$.

b) Tuottaa(isi)vatko a-kohdan sarjan osasummat Gibbsin ilmiön pisteessä $x = \pi/2$? Perustele. [2 pistettä]

2 a) Muodosta tehtävässä 1 annetusta funktion $f(t)$ Fourier-sarjan kompleksiversio

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

missä

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0,\quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n),\quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (n \geq 1)$$

b) Olisiko (jos muodostettaisiin) tehtävän 1 funktion $f(t)$ Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja derivaatan $f'(t)$ Fourier-sarja? Perustele.

3. Tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & \text{(muulloin)} \end{cases}$$

tiedetään Fourier-muunnos $F(j\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T)$. Johda muunnos

a) tasapulssille $H(t) - H(t-T)$,

b) ikkunoidulle sinille $x(t) = \sin(\omega_0 t)\,[H(t) - H(t-T)]$.

Apuna: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\} = F(j(\omega - a))$ ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$ ja $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(j(-\omega))$.

4 a) 'On-off' -pulssin esitys Fourier-integraalina

$$f(t) = \begin{cases} A & (-T \leq t < 0) \\ -A & (0 \leq t < T) \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right]d\omega$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla pulssin Fourier-muunnoksella $F(j\omega) = -AT^2 j\omega\,\mathrm{sinc}^2(\omega T/2)$. Tee tämä sievennys!

b) Edellä saadun integraalin likiarvo

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \ldots\, d\omega$$

sievenee vielä lisää. Tee tämä sievennys mahdollisimman pitkälle!

(*Vihje:* Parillisuus ja parittomuus ja origokeskinen väli.)