

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Laske tai päättele suoraan (parillisuuden tai parittomuuden nojalla) funktion $h(t) = |\cos(t)|$ kompleksisen Fourier-sarjan kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T} \left(\int_d^{d+T} h(t) \cos(n\omega t) dt - j \int_d^{d+T} h(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Vihje 1: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päättele sen avulla T sekä ω .

Vihje 2: $2 \cos(t) \cos(mt) = \cos(m-1)t + \cos(m+1)t$.

2. Funktiolle $f(t) = |\sin(t)|$ tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{j2nt}$$

a) Muodosta tästä funktion $f(t)$ Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

missä

$$\frac{1}{2}a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = j(c_n - c_n^*) \quad (n \geq 1)$$

b) Olisiko funktion $f(t)$ Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja (jos se muodostettaisiin) derivaatan $f'(t)$ Fourier-sarja? Perustele.

Käännä!

3. Tunnetaan Fourier-muunnos $K(j\omega) = AT \text{sinc}^2(\omega T/2)$ kolmiopulssille

$$k(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \leq t \leq 0) \\ (-A/T)t + A & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

a) Johda Fourier-muunnos kolmiopulssille

$$f(t) = t [H(t) - H(t - 1/2)] + (1 - t) [H(1 - 1/2) - H(t - 1)]$$

[4 pistettä]

b) Totea a)-kohdan vastauksen itseisarvo ja perustele se.

[2 pistettä]

Apuna: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau} F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(j(\omega-a))$
ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$.

4 a) Tehtävän 3 kolmiopulssin $k(t)$ esitys Fourier-integraalina

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla pulssin Fourier-muunnoksella. Tee tämä sievennys!

b) Edellä saadun integraalin likiarvo

$$k(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \dots d\omega$$

sievenee vielä lisää. Tee tämä sievennys mahdollisimman pitkälle!

(Vihje: Parillisuus ja parittomuus ja origokeskinen väli.)

