

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon T -jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kaikki kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päätele seuraavasti: integroi tuo yhtälö puolittain

$\int_{-T/2}^{T/2} \dots dt$ ja oletta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida yhteen-

laskettava kerrallaan. Päätele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo laskemalla se tai hyödyntäen integroitavan parittomuus. (Yhdelle kertoimista pitäisi näin syntyä laskukaava.)

2. Laske funktion $f(t) = \cos(t) + \sin(t)$ Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \left(\int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt - j \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

hyödyntäen integroitavan parittomuus ja jo(i)tain seuraavista:

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

Muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Käännä!