MAT-20450 Fourier'n menetelmät

Tentti 17.3.2009

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Funktio $f(t) = \sin(t)$ $(-\pi/2 \le t < \pi/2)$ jatketaan π-jaksoiseksi. Hahmottele sen kuvaajaa. Laske funktion $f(t)$ (jatketun version) parittomuutta hyödyntäen sen Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - \mathrm{j}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t}.$$

Vihje 1: $2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

Vihje 2: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Vihje 3: $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

2. Funktiolle $g(t) = \cos(t)$ $(0 \le t < \pi)$ jatkettuna π-jaksoiseksi tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{j}4}{\pi}\frac{n}{1-4n^2}e^{\mathrm{j}2nt}.$$

a) Muodosta tästä funktion $g(t)$ Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$

missä

$$\frac{1}{2}a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = \mathrm{j}(c_n - c_n^*) \qquad (n \ge 1)$$

b) Olisiko funktion $g(t)$ Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja (jos se muodostettaisiin) derivaatan $g'(t)$ Fourier-sarja? <u>Perustele</u>.

Käännä!

3. Tunnetaan Fourier-muunnos $F(\mathrm{j}\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T)$ tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \leq T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

Päättele Fourier-muunnos

a) tasapulssille $y(t) = H(t) - H(t - T)$,

b) ikkunoidulle sinille $x(t) = \sin(\omega_0 t)\,[H(t) - H(t - T)]$.

Tiedetään, että $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j} \sin x$,

joten $e^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j} \sin x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x} = 2 \cos x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x} = 2\mathrm{j} \sin x$.

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega - a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.

4. Olkoon $f(t) = \sin(\omega_0 t)$. Tutkitaan Fourier-muunnoksen

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$$

olemassaoloa ns. Cauchyn pääarvon

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$$

avulla. Tutki siis, onko Cauchyn pääarvo äärellisenä olemassa funktion $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ tapauksessa.

Vihje 4: Parillisuus, parittomuus ja origokeskinen väli.

Vihje 5: Katso myös *vihje 1*.

(Johtopäätökset tehtäisiin seuraavalla peruslogiikalla: Cauchyn pääarvon olemassaolo ei vielä takaisi mitään, mutta sen olemattomuus takaisi, että Fourier-muunnostakaan ei ole.)