MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 10.12.2009

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Oletetaan T-jaksoinen funktio $f(t)$ sellaiseksi, että se <u>voidaan</u> esittää Fourier-sarjana

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$. Osoita, että kertoimen a_1 on pakko toteuttaa yhtälö

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega t)\,dt.$$

Ohje: Integroi yhtälö $f(t)\cos(\omega t) = \ldots$ puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \ldots\,dt$ ja <u>oleta</u>, että oikealla puolella integrointi yhteenlaskettava kerrallaan tuottaa oikean tuloksen.

Ohje+: Hyödynnä tilaisuuden tullen $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Ohje++: Hyödynnä integroitavan parittomuus tilaisuuden tullen.

2. Laske tai päättele suoraan (parillisuuden tai parittomuuden nojalla) funktion $h(t) = |\cos(t)|$ kompleksisen Fourier-sarjan kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} h(t)\cos(n\omega t)\,dt - \mathrm{j}\int_d^{d+T} h(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}n\omega t}.$$

Ohje: Hahmottele funktion kuvaajaa ja päättele sen avulla T sekä ω.

Ohje +: Hyödynnä tilaisuuden tullen edeltäviä ohjeita sekä

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Käännä!

3. Laske Fourier-muunnoksen määritelmästä

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\mathrm{j}\omega t}\,dt$$

lähtien muunnos 'kaksipuoleiselle' eksponenttipulssille

$$f(t) = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t} & (t \le 0) \\ e^{-2t} & (t > 0) \end{cases}$$

4. Tunnetaan Fourier-muunnos $F(\mathrm{j}\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T)$ tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

Päättele Fourier-muunnos

a) tasapulssille $y(t) = H(t) - H(t-2)$,

b) ikkunoidulle sinille $x(t) = \sin(2t)\,[H(t+1) - H(t-1)]$,

c) ikkunoidulle sinille $z(t) = \sin(2t)\,[H(t) - H(t-2)]$.

Tiedetään, että $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$,

joten $e^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x} = 2\cos x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x} = 2\mathrm{j}\sin x$.

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.