3. Olkoon $c > 0$. Laske Fourier-muunnoksen määritelmästä

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$$

lähtien muunnos pulssille

a) $f_a(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 2e^{-ct} & (t > 0) \end{cases}$ **b)** $f_b(t) = \begin{cases} -e^{ct} & (t \le 0) \\ e^{-ct} & (t > 0) \end{cases}$

Yhdessä kirjassa "ideoidaan" uusia Fourier-muunnopareja katsomalla, mitä tapahtuu funktioille ja niiden muunnoksille, kun $c \to 0+$.

c) Mitkä ovat **a**-kohdassa funktion $f_a(t)$ ja sen muunnoksen $F_a(\mathrm{j}\omega)$ raja-arvofunktiot, kun $c \to 0+$?

b) Mitkä ovat **b**-kohdassa funktion $f_b(t)$ ja sen muunnoksen $F_b(\mathrm{j}\omega)$ raja-arvofunktiot, kun $c \to 0+$?

Kommentti: Jos laskit oikein, niin sait saman raja-arvofunktion kummallekin Fourier-muunnokselle. Tuon kirjan ideoinnissa on siis pakko olla jotain vikaa. Fourier-muunnoksen käänteismuunnos ei nimittäin voi olla kaksi eri funktiota samanaikaisesti.

4. Olkoon $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$. Päättele Fourier-muunnos funktiolle

$$f(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

seuraavasti: esitä trigonometrinen funktio eksponenttifunktion avulla, käytä lineaarisuutta ja taajuussiirto-ominaisuutta (yksi alla luetelluista).

Tiedetään, että $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$,

joten $e^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x} = 2\cos x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x} = 2\mathrm{j}\sin x$.

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.