MAT-20450 Fourier'n menetelmät

Tentti 6.4.2010

– **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– **Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.**

1. Olkoon T-jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päättele kertoimelle a_1 tai b_1 (kumpi lieneekin tullakseen) laskukaava seuraavasti: integroi yhtälö

$$f(t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}a_0 \cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t)\cos(\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\cos(\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \ldots dt$ ja oleta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida yhteenlaskettava kerrallaan. Päättele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo hyödyntäen integroitavan parittomuus ja jo(i)tain seuraavista:

$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

2. Funktio $f(t) = \sin(t)$ $(-\pi/2 \le t < \pi/2)$ jatketaan π-jaksoiseksi. Hahmottele sen kuvaajaa. Laske funktion $f(t)$ (jatketun version) Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_{d}^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_{d}^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

hyödyntäen funktion parillisuutta tai parittomuutta sekä jotain tehtävän **1** kaavoista, ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Helpottava voi olla myös $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.

Käännä!