MAT-13520 Laaja Matematiikka 2u
Tentti 14.2.2011

Tentissä ei saa käyttää kirjallista materiaalia eikä laskinta.

1. Olkoot $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Olkoon edelleen T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee pisteen $\mathbf{x}_0$ kautta ja jonka normaalivektorina on $\mathbf{n}$.

a. Anna tason T esitys yhtälömuodossa $ax + by + cz + d = 0$.

b. Anna tason T esitys vektorimuodossa $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, missä $s, t \in \mathbb{R}$.

c. Tutki kuuluuko piste $\mathbf{x}_1$ tasoon T.

2. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat lineaarisesti riippumattomia $\mathbb{R}^n$:n vektoreita.

a. Tutki, onko vektorijoukko $\{\mathbf{0}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subset \mathbb{R}^n$ lineaarisesti riippumaton.

b. Tutki, ovatko vektorit $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ lineaarisesti riippumattomia $\mathbb{R}^4$:n vektoreita.

3. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ muodostavat aliavaruuden $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ kannan ja että $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\|$. Merkitsemme $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
Osoita, että

a. vektorit $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$ ovat ortogonaalisia,

b. joukko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ on V:n kanta.

4. Laske matriisin

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja muodosta niitä vastaavat ominaisavaruudet.