

**MAT-13520 Laaja matematiikka 2u**

**Tentti 13.2.2012**

EI LASKIMIA, EI MUISTIINPANOJA

PIIRRÄ PÄÄKONSEPTIIN NIMEN ALLE VIISI NELIÖTÄ (à  $2 \times 2$ -ruutua):

--	--	--	--	--

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Laske matriisille  $A$  seuraavat asiat:

- (a) determinantti, (1p)
- (b) käänteismatriisi, (1p)
- (c) nolla-avaruuden virittäjävektorit, (1p)
- (d) sarakeavaruuden virittäjävektorit, (1p)
- (e) ominaisarvot ja -avaruudet. (2p)

3. Olkoon  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- (a) Määrittele matriisin ominaisarvot ja ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet. (2p)
- (b) Jos  $A^2 = I_n$ , mitkä ovat tällöin  $A$ :n ominaisarvot? (2p)
- (c) Osoita että matriiseilla  $A$  ja  $A^T$  on samat ominaisarvot. (2p)

4. Olkoon  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  joukko lineaarisesti riippumattomia vektoreita  $\mathbb{R}^n$ :ssä. Oletetaan, että  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ , jossa  $c_1 \neq 0$ . Osoita, että joukon  $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

5. Olkoot  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  aliavaruuksia. Osoita, että  $U \cap V$  on myös avaruuden  $\mathbb{R}^n$  aliavaruus.