

MAT-13520 Laaja matematiikka 2u
Tentti 12.12.2011
EI LASKIMIA, EI MUISTIINPANOJA

PIIRRÄ PÄÄKONSEPTIIN NIMEN ALLE VIISI NELIÖTÄ (à 2×2 -ruutua):

--	--	--	--	--

1. Tutki Gauß-Jordanin eliminointimenetelmän avulla millä parametrin $k \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 1 \\x_2 + x_3 &= k \\x_2 + kx_3 &= 1\end{aligned}$$

on

- (a) yksikäsitteinen ratkaisu,
 - (b) ei yhtään ratkaisua,
 - (c) äärettömän monta ratkaisua?
2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kun $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Tutki determinantin avulla millä parametrin a valinnoilla kääntematriisi A^{-1} on olemassa.
 - (b) Etsi edellä olevissa tilanteissa A^{-1} .
3. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin A

- (a) ominisarvot ja vastaavat ominaisavaruuksien kannat,
 - (b) ominisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut,
 - (c) nolla-avaruuden kanta,
 - (d) sarakeavaruuden kanta.
4. Olkoon $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ortonormaali joukko vektoreita avaruudessa \mathbb{R}^n . Osoita, että joukon vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat.
5. Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$ jokaisella $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

on aliavaruus.