

PIIRRÄ PÄÄKONSEPTIIN NIMEN ALLE VIISI NELIÖTÄ (à 2 × 2-ruutua):

--	--	--	--	--

OHJE: Kirjoita tentin alkuun miten haluat tenttisi arvosteltavan (kirjoita (a),(b) tai (c) näkyviin tenttipaperin alkuun):

- (a) Jos haluat kurssiarvosanasi pelkän tentin perusteella, tee tehtävät 1-5.
- (b) Jos puolestasi haluat, että harjoitussuorituksesi ja harkkityösi otetaan huomioon arvostelussa, tee tehtävät 1-4. Arvosanarajat ovat samat kuin kohdassa (a).
- (c) Sekä (a) että (b), jolloin tee tehtävät 1-5. Laskemme tällöin kaksi arvosanaa, joista parempi jää voimaan.

1. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + 4y = \lambda, \end{cases}$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Kirjoita yhtälöryhmä matriisimuodossa $Ax = b$.
- (b) Tutki determinantin avulla käänteismatriisin A^{-1} olemassaoloa.
- (c) Millä parametrin λ arvolla yhtälöparilla ei ole ratkaisuja?

2. Olkoon A neliömatriisi.

- (a) Määrittele A :n ominaisarvot, ominaisvektorit ja karakteristinen polynomi.
- (b) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

missä $a \in \mathbb{R}$. Millä a :n arvoilla x on A :n ominaisvektori? Mikä on tällöin tätä vastaava ominaisarvo?

3. Etsi matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

sarake- ja nolla-avaruudelle kanta, kun

$$\text{rref}([A|0]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mitkä ovat sarake- ja nolla-avaruuksien dimensiot? Tarkista, että matriisien dimensiolause toteutuu.

4. Määritellään \mathbb{R}^2 :n osajoukko

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \right\}.$$

(a) Osoita aliavaruuden määritelmään perustuen, että S on \mathbb{R}^2 :n aliavaruus.

(b) Etsi vektori y siten, että

$$S = \text{span}\{y\}.$$

(c) Määää aliavaruudelle (jokin) kanta.

5. Olkoot nyt S_1, \dots, S_k avaruuden \mathbb{R}^n aliavaruuksia. Jos jokainen $x \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää yksikäsitteisesti summana

$$x = x_1 + \dots + x_k$$

siten, että $x_j \in S_j$, sanotaan että **aliavaruuksien** S_1, \dots, S_k **suora summa** on \mathbb{R}^n ja merkitään

$$\mathbb{R}^n = S_1 \oplus \dots \oplus S_k.$$

Olkoot nyt e_1, \dots, e_4 avaruuden \mathbb{R}^4 luonnollisen kannan vektorit. Osoita, että

$$\mathbb{R}^4 = \text{span}\{e_1 + e_2, e_1 - e_2\} \oplus \text{span}\{e_3\} \oplus \text{span}\{e_4\}.$$

Jos $x \in \mathbb{R}^4$, niin miltä näyttää (määritelmässä esitetty) jako

$$x = x_1 + x_2 + x_3?$$