

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 27.09.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske käyrän $y = x^2$ ja suoran $x - 2y = -1$ rajaaman alueen pinta-ala.
2. Laske integraali $\iiint_S f(x, y, z) dv$, missä $f(x, y, z) = x - z$ ja S on pintojen $z = y^2$, $z = 1$, $z = x$ ja $x = 0$ rajaama joukko.
3. Tarkastellaan funktiota $y(x)$ koskevaa differentiaaliyhtälöä
$$y' - 3x^2 e^{-y} = 0.$$
 - a) Mitä seuraavista tyypeistä yhtälö on: lineaarinen, ensimmäistä kertalukua, vakiokertoiminen, homogeeninen, separoituva?
 - b) Hae yhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.
4. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.
 - a) Hae yhtälön yleinen ratkaisu.
 - b) Ratkaise yhtälö alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$.
 - c) Onko systeemi $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ tasapainopisteessään stabiili?
5. Muunna funktioita $y(t)$, $u(t)$ koskeva alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} y'' - 2u'' + y' - 3u' - y + u = \sin t \\ y'' + 2u'' + 3y' - u' - 4y = e^t \\ y(0) = a, y'(0) = b, u(0) = c, u'(0) = d. \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemin (normaaliryhmän) alkuarvoprobleemaksi

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$