

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 22.05.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske integraali $\iint_{\Omega} \cos y \, da$, kun $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq x\}$.

2. Kappale $S \subset \mathbb{R}^3$ muodostuu joukosta, jota rajoittavat pinnat $z = x^2$, $z = 8 - x^2$, $y = -1$ ja $y = 3$. Laske S :n tilavuus.

3. Tarkastellaan funktiota $y(x)$ koskevaa differentiaaliyhtälöä $1 + y^2 + xy y' = 0$.

a) Mitä seuraavista tyypeistä yhtälö on: lineaarinen, ensimmäistä kertalukua, vakiokertoiminen?

b) Hae yhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.

4. Muunna funktioita $y(t)$, $u(t)$ koskeva differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = \sin t \\ u' - 4y = e^t \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Laske eksponenttimatriisi e^{At} .

b) Ratkaise systeemi alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [0 \ 2]^T$.

c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?