

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 19.05.2006

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. a) Olkoon S reaalinen diagonalisoituva $n \times n$ -matriisi, jonka ainoa ominaisarvo on λ . Mitä ovat silloin λ :n algebrallinen ja geometrinen kertaluku? Osoita edelleen, että välttämättä $S = \lambda I$.
b) Todista oikeaksi tai vääräksi: Jos A ja B ovat $n \times n$ -matriiseja, ja λ on A :n ja μ B :n ominaisarvo, niin $\lambda + \mu$ on summan $A + B$ ominaisarvo.
2. Olkoon A vinosymmetrinen reaalinen $n \times n$ -matriisi. Osoita:
a) Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$.
b) Matriisilla $I + A$ ei ole nolla ominaisarvona.
3. Hae funktion $f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ lokaalit ääriarvot ja tutki niiden laatu (eli ovatko lokaaleja minimi- tai maksimikohtia vai satulapisteitä).

4. a) Hae matriisin $M = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja vastaavat

ominaisvektorit (ominaisavaruuksien kannat). Millä vakioiden a ja b arvoilla (jos millään) M on diagonalisoituva?

- b) Hae differentiaaliyhtälön $y'(x) = -6xy(x)$ se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -4$.

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Laske eksponenttimatriisi e^{At} .
- b) Ratkaise systeemi alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$.
- c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?