

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 17.05.2008

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

- ① Laske integraali $\iint_{\Omega} (x + 4y^2) da$, kun Ω on suorien $y = -x$, $y = x - 2$ ja $y = 3$ rajaama kolmio.
- ② Olkoon A tetraedi, jonka kärjet ovat $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Laske avaruusintegraali $\iiint_A xy dv$.
- ③ Hae differentiaaliyhtälön $y'(x) = -6xy(x)$ se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -4$.
- ④ Oletetaan, että funktiot a_i ($i=0,1,\dots,n-1$) ovat jatkuvia kaikkialla \mathbb{R} :ssä.
- a) Muunna differentiaaliyhtälö
- $$(1) \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$
- differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)
- $$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t).$$
- b) Päättele sitten olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen avulla, *ettei* funktio $y(t) = t^{n+1}$ voi olla yhtälön (1) ratkaisu \mathbb{R} :ssä.
- ⑤ Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
- a) Laske eksponenttimatriisi e^{At} .
- b) Ratkaise systeemi alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$.
- c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?